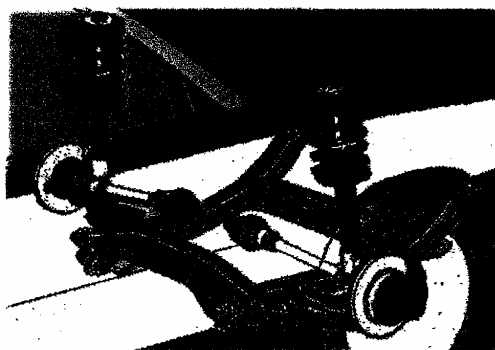


P. Agati Y. Brémont G. Delville

DEUG TI • IUT • STS

Mécanique du solide

Applications industrielles



DUNOD

N° 03

1^{re} partie

CINÉMATIQUE

1 modélisation et paramétrage des mécanismes

Un mécanisme est un ensemble de pièces mécaniques reliées entre elles par des liaisons, en vue de réaliser une fonction déterminée.

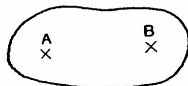
Le but de ce livre est l'étude des mouvements et des efforts dans les mécanismes. Pour cela, nous allons modéliser les pièces mécaniques et les liaisons.

1. MODÉLISATION DES PIÈCES MÉCANIQUES

Nous considérerons que les pièces mécaniques peuvent être modélisées, en première approximation, par des solides indéformables. Ceci exclut bien sûr les pièces dont la fonction est précisément de se déformer : ressorts, rondelles élastiques, barres de torsion, etc.

Définition d'un solide indéformable

Une pièce mécanique (S) peut être considérée comme un solide indéformable si quels que soient les points A et B de (S) la distance AB reste constante au cours du temps t.



$$\forall A \text{ et } B \in (S), \quad \forall t, \quad \|\overline{AB}\| = \text{Cte.}$$

Fig. 1

2. MODÉLISATION DES LIAISONS

Définissons les modèles de liaisons, qui existent entre deux solides (S_1) et (S_2) , que l'on utilisera pour établir les schémas cinématiques des mécanismes.

Pour chaque modèle de liaison, qui est un modèle de référence théorique, nous donnerons :

- la définition mathématique;
- les mouvements relatifs que la liaison autorise.
- les schématisations planes et spatiales normalisées sous forme de tableau, au paragraphe 2.11.

Pour cela un repère orthonormé dit $R(O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ sera placé sur chaque liaison. Ce repère n'est lié à aucun des deux solides (S_1) ou (S_2) .

2.1. LIAISON PONCTUELLE

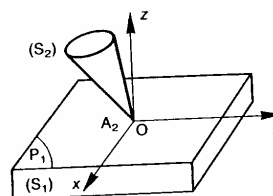


Fig. 2

Définition

Les deux solides (S_1) et (S_2) ont une liaison ponctuelle si, au cours de leur mouvement, un point A_2 de (S_2) reste dans un plan P_1 de (S_1) .

Mouvement relatif

Considérons le repère $R(O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ tel que l'origine O soit confondue avec le point A_2 , le vecteur unitaire $\vec{z}$ soit perpendiculaire au plan P_1 . Par rapport aux trois axes de ce repère, le mouvement de (S_2) par rapport à (S_1) se décompose en rotations et translations élémentaires suivies :

- rotations autour de $(O, \vec{x})$, $(O, \vec{y})$ et $(O, \vec{z})$;
- translations suivant $(O, \vec{x})$ et $(O, \vec{y})$.

2.2. LIAISON LINÉIQUE RECTILIGNE

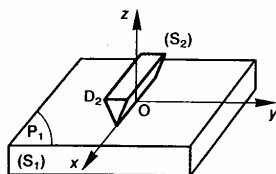


Fig. 3

Définition

Les deux solides (S_1) et (S_2) ont une liaison linéique rectiligne si, au cours de leur mouvement relatif, une droite D_2 de (S_2) reste dans un plan P_1 de (S_1) .

Mouvement relatif

Considérons le repère $R(O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ tel que l'axe $(O, \vec{x})$ soit confondu avec la droite D_2 et le vecteur unitaire $\vec{z}$ perpendiculaire au plan P_1 . Le mouvement de (S_2) par rapport à (S_1) se décompose en :

- rotations autour de $(O, \vec{x})$ et $(O, \vec{z})$,
- translations suivant $(O, \vec{x})$ et $(O, \vec{y})$.

2.3. LIAISON LINÉIQUE ANNULAIRE

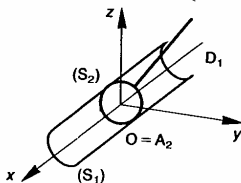


Fig. 4

Définition

Les deux solides (S_1) et (S_2) ont une liaison linéique annulaire si, au cours de leur mouvement relatif, un point A_2 de (S_2) reste sur une droite D_1 de (S_1) .

Mouvement relatif

Considérons le repère $R(O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ d'origine A_2 , tel que l'axe $(O, \vec{x})$ soit confondu avec la droite D_1 . Par rapport à ce repère, le mouvement de (S_2) par rapport à (S_1) est constitué des mouvements élémentaires suivants :

- rotations autour de $(O, \vec{x})$, $(O, \vec{y})$ et $(O, \vec{z})$,
- translation suivant $(O, \vec{x})$.

2.4. LIAISON ROTULE

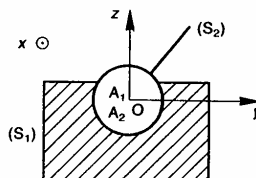


Fig. 5

Définition

Les deux solides (S_1) et (S_2) ont une liaison rotule si, au cours de leur mouvement relatif, un point A_2 de (S_2) reste confondu avec un point A_1 de (S_1) .

Mouvement relatif

Plaçons l'origine O du repère $R(O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ au point A_1 confondu avec A_2 . Le mouvement de (S_2) par rapport à (S_1) se décompose en :

- rotations autour de $(O, \vec{x})$, $(O, \vec{y})$ et $(O, \vec{z})$.

2.5. LIAISON APPUI PLAN

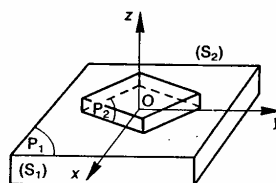


Fig. 6

Définition

Les deux solides (S_1) et (S_2) ont une liaison appui plan si, au cours de leur mouvement relatif, un plan P_2 de (S_2) reste confondu avec un plan P_1 de (S_1) .

Mouvement relatif

En positionnant le vecteur unitaire $\vec{z}$ du repère $R(O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ perpendiculaire aux plans P_1 et P_2 on constate que le mouvement de (S_2) par rapport à (S_1) se décompose en :

- rotation autour de $(O, \vec{z})$,
- translations suivant $(O, \vec{x})$ et $(O, \vec{y})$.

2.6. LIAISON PIVOT GLISSANT

Définition

Les deux solides (S_1) et (S_2) ont une liaison pivot glissant si, au cours de leur mouvement relatif, une droite D_2 de (S_2) reste confondue avec une droite D_1 et (S_1) .

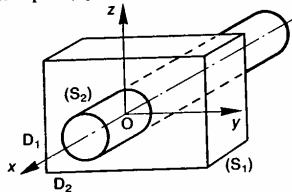


Fig. 7

Mouvement relatif

Plaçons l'axe $(O, \vec{x})$ du repère $R(O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ sur les droites D_1 et D_2 . Le mouvement de (S_2) par rapport à (S_1) se décompose en :

- rotation autour de $(O, \vec{x})$,
- translation suivant $(O, \vec{x})$.

2.7. LIAISON GLISSIÈRE HÉLICOÏDALE

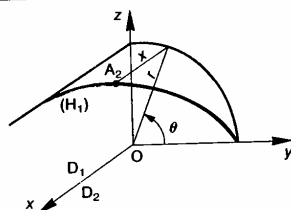


Fig. 8

Définition

Les deux solides (S_1) et (S_2) ont une liaison glissière hélicoïdale si, au cours de leur mouvement relatif, d'une part, une droite D_2 de (S_2) reste confondue avec l'axe D_1 d'une hélice circulaire H_1 de rayon r liée à (S_1) , et d'autre part, un point A_2 de (S_2) situé à une distance r de D_2 décrit l'hélice circulaire H_1 .

Mouvement relatif

En positionnant l'axe $(O, \vec{x})$ du repère $R(O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ sur les droites D_1 et D_2 , on constate que le mouvement de (S_2) par rapport à (S_1) se décompose en :

- rotation autour de $(O, \vec{x})$,
- translation suivant $(O, \vec{x})$.

Ces deux mouvements ne sont pas indépendants. En effet, si l'on suppose le repère R lié à (S_1) on peut définir la position du point A_2 par rapport à R , par le paramètre angulaire θ et l'abscisse x (figure 8).

En appelant p le pas réduit de l'hélice ($p = \text{pas de l'hélice divisé par } 2\pi$) on a entre x et θ la relation (dans le cas d'une hélice à droite) :

$$x = p\theta$$

2.8. LIAISON GLISSIÈRE

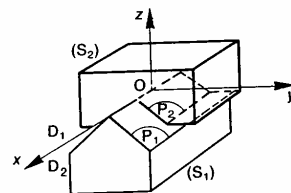


Fig. 9

Définition

Les deux solides (S_1) et (S_2) ont une liaison glissière si, au cours de leur mouvement relatif, d'une part, un plan P_2 de S_2 reste confondue avec un plan P_1 de (S_1) , et d'autre part, une droite D_2 liée à (S_2) et située dans le plan P_2 reste confondue avec une droite D_1 liée à (S_1) et située dans le plan P_1 .

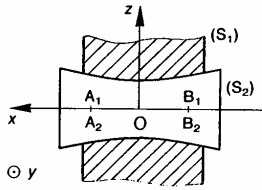
Mouvement relatif

Plaçons l'axe $(O, \vec{x})$ du repère $R(O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ sur les droites D_1 et D_2 . Le mouvement de (S_2) par rapport à (S_1) est une translation d'axe $(O, \vec{x})$.

2.9. LIAISON PIVOT

Définition

Les deux solides (S_1) et (S_2) ont une liaison pivot si au cours de leur mouvement relatif deux points A_2 et B_2 de (S_2) , distants d'une longueur l , restent confondus avec deux points A_1 et B_1 de (S_1) distants d'une même longueur l (non nulle).

Fig. 10 $\odot y$

Mouvement relatif

Plaçons l'axe $(O, \vec{x})$ du repère $R(O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ sur les droites A_1B_1 et A_2B_2 . Le mouvement de (S_2) par rapport à (S_1) est une rotation d'axe $(O, \vec{x})$.

2.10. LIAISON ENCASTREMENT

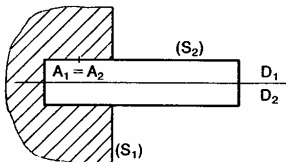


Fig. 11

Définition

Les deux solides (S_1) et (S_2) ont une liaison encastrement si, au cours de leur mouvement relatif, d'une part, une droite D_2 de (S_2) reste confondue avec une droite D_1 de (S_1) , et d'autre part, un point A_2 de (S_2) situé à une distance d non nulle de D_2 reste confondu avec un point A_1 de (S_1) situé à une distance d non nulle de D_1 .

Mouvement relatif

La liaison encastrement ne permet aucun mouvement relatif entre (S_1) et (S_2) .

2.11. SCHÉMATISATIONS NORMALISÉES DES LIAISONS

Dans le tableau de la figure 12 sont présentées les schématisations planes et spatiales normalisées des liaisons que nous venons d'étudier. Comme précédemment, sur chaque liaison est placé le repère orthonormé direct $R(O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$.

2.12. CHOIX D'UNE MODÉLISATION DE LIAISON

D'un point de vue cinématique, une liaison réelle entre deux solides (S_1) et (S_2) est caractérisée par :

- une géométrie (forme, dimension de la liaison),
- un jeu de fonctionnement.

EXEMPLE 1

Liaison entre un arbre (S_2) et son alésage (S_1) .

Notons :

- d le diamètre de l'arbre.
- l la longueur du palier.
- j le jeu radial dans la liaison ($j > 0$).

Soit $R(O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ un repère orthonormé direct, l'axe $(O, \vec{x})$ étant placé suivant l'axe de l'alésage.

Les mouvements de (S_2) par rapport à (S_1) se classent, compte tenu du jeu j , en deux catégories :

- Mouvements de grande amplitude :
 - rotations autour de $(O, \vec{x})$,
 - translation suivant $(O, \vec{x})$.
- Mouvements de faible amplitude :
 - rotations autour de $(O, \vec{y})$ et $(O, \vec{z})$,
 - translations suivant $(O, \vec{y})$ et $(O, \vec{z})$.

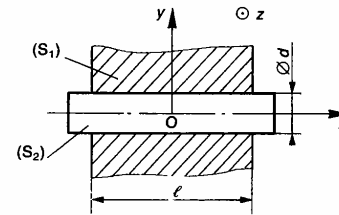


Fig. 13.

L'amplitude de ces mouvements dits de *faible* amplitude est fonction du jeu j et du rapport $\frac{l}{d}$ de la liaison.

Le choix de la modélisation d'une liaison réelle par tel ou tel modèle de liaison est fonction du degré de précision que l'on décide d'adopter. Dans le cas présent, si l'on suppose que l'ajustement est du type H7/g6, on considère généralement que l'on peut modéliser la liaison, avec une précision suffisante par :

- une liaison pivot glissant pour $\frac{l}{d} \geq 1,5$,
- une liaison linéique annulaire pour $\frac{l}{d} \leq 0,2$.

Pour $0,2 < \frac{l}{d} < 1,5$ la modélisation de la liaison sera fonction du degré de précision que l'on adoptera pour analyser le mécanisme dont fait partie la liaison.

Liaison	SCHÉMATISATIONS NORMALISÉES DES LIAISONS	
	plane	spatiale
ponctuelle de normale ($O, \vec{z}$)		
linéique rectiligne d'axe ($O, \vec{x}$) de normale ($O, \vec{z}$)		
linéique annulaire d'axe ($O, \vec{x}$)		
rotule de centre O		
appui plan de normale ($O, \vec{z}$)		

Fig. 12. a.

Liaison	SCHÉMATISATIONS NORMALISÉES DES LIAISONS	
	plane	spatiale
pivot glissant d'axe $(O, \vec{x})$		
glissière hélicoïdale d'axe $(O, \vec{x})$		
glissière d'axe $(O, \vec{x})$		
pivot d'axe $(O, \vec{x})$		
encastrement		

Fig. 12. b.

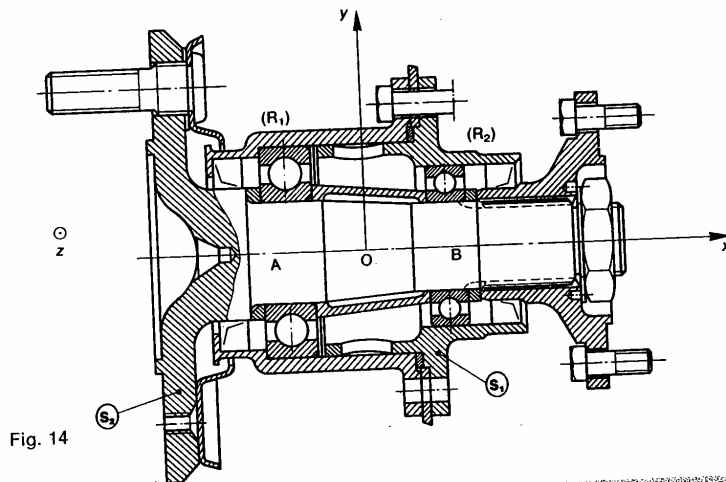


Fig. 14

EXEMPLE 2

Montage de l'arbre d'une fusée de roue dans son palier sur deux roulements rigides à une rangée de billes (figure 14).

Globalement la liaison de l'arbre (S_2) par rapport au palier (S_1) est modélisable, avec une précision donnée, par une liaison pivot d'axe $(O, \vec{x})$.

Cette liaison est réalisée avec deux roulements rigides à une rangée de billes (R_1) et (R_2).

Considérons la liaison réalisée par un seul roulement (R_1) par exemple.

Modélisons la liaison entre la bague extérieure du roulement et (S_1) par une liaison encastrement ainsi que la liaison entre la bague intérieure du roulement et (S_2).

Reste à modéliser la liaison entre la bague intérieure et la bague extérieure. Pour cela nous devons tenir compte :

- du rotulage possible du roulement, c'est-à-dire de l'angle d'inclinaison maximal que peut prendre l'axe de la bague intérieure par rapport à l'axe de la bague extérieure (angle noté α),
- de la déformation de l'arbre, plus précisément de l'inclinaison maximale que peut prendre l'axe de la section droite située en A par rapport à la ligne moyenne de l'arbre (angle noté β) (figure 15).

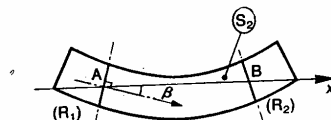


Fig. 15

Suivant les valeurs relatives de α et β on adopte les modélisations suivantes :

- $\alpha \geq \beta$: modélisation par une liaison rotule,
- $\alpha < \beta$: modélisation par une liaison pivot.

3. NOMBRE DE DEGRÉS DE LIBERTÉ D'UNE LIAISON**Définition**

Le nombre de degrés de liberté d'une liaison est le nombre de mouvements indépendants de rotation et de translation suivant $(O, \vec{x})$, $(O, \vec{y})$, $(O, \vec{z})$ que la liaison autorise.

EXEMPLES

- La liaison ponctuelle est à 5 degrés de liberté
- la liaison pivot glissant est à 2 degrés de liberté
- la liaison glissière hélicoïdale est à 1 degré de liberté car la translation et la rotation suivant de la liaison sont proportionnelles.

REMARQUE

Lorsque deux solides n'ont aucune liaison entre eux, ils ont une liaison libre. Cette liaison a 6 degrés de liberté.

4. PARAMÉTRAGE DE LA POSITION D'UN SOLIDE PAR RAPPORT À UN REPERE

Pour définir la position d'un solide (S) par rapport à un repère $R(O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$, il faut commencer par lier à ce solide un repère $R_1(O_1, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$ et définir la position du repère R_1 par rapport au repère R .

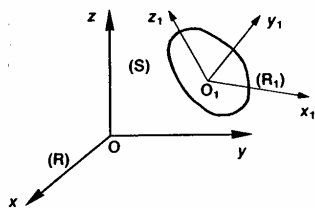


Fig. 16

Le repère R_1 est caractérisé par son origine O_1 et sa base $(\vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$. Nous devons donc définir la position de l'origine O_1 dans R et l'orientation de la base $(\vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$ de R_1 par rapport à la base $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ de R .

REMARQUE

Tous les repères introduits sont orthonormés directs.

4.1. PARAMÉTRAGE DE LA POSITION DE L'ORIGINE O_1

Les paramètres qui définissent la position d'un point dans un repère sont habituellement :

- les coordonnées cartésiennes,
- les coordonnées cylindriques,
- les coordonnées sphériques.

Le type de coordonnées choisi est fonction du problème que l'on a à traiter (problème à symétrie de révolution autour d'un axe, problème à symétrie sphérique, ...).

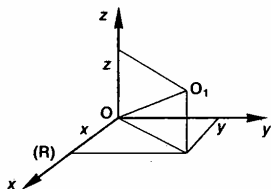
4.1.1. Coordonnées cartésiennes

Fig. 17

Les coordonnées cartésiennes x, y, z du point O_1 sont les projections orthogonales du vecteur $\vec{OO}_1$ sur la base du repère R .

Ces paramètres sont en nombre nécessaire et suffisant pour positionner O_1 dans R .

Par suite, les paramètres x, y, z sont dits *indépendants*.

Imaginons que OO_1 soit une tige de longueur l ayant une liaison rotule de centre O avec un bâti, et supposons que pour la commodité des calculs on soit amené à traiter le problème avec les quatre paramètres x, y, z, l .

Dans ce cas, les quatre paramètres introduits sont liés entre eux par la relation :

$$x^2 + y^2 + z^2 = l^2.$$

Les paramètres x, y, z, l sont alors dits *dépendants*. D'une façon générale, si l'on définit la position d'un point dans un repère par n paramètres ($n \geq 3$), il existe entre ces n paramètres, introduits à priori, q relations indépendantes, telles que :

$$q = n - 3.$$

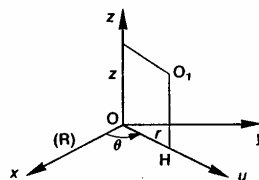
4.1.2. Coordonnées cylindriques

Fig. 18

Soit

- { H la projection orthogonale du point O_1 sur le plan $(O, \vec{x}, \vec{y})$.
- { $\vec{u}$ un vecteur unitaire de direction OH.

Les coordonnées cylindriques du point O_1 dans le repère R sont :

- { $r = \overline{OH}$: mesure algébrique de $\overline{OH}$ sur l'axe $(O, \vec{u})$.
- { $\theta = (\vec{x}, \vec{u})$: angle orienté par le vecteur unitaire $\vec{z}$ normal au plan $(\vec{x}, \vec{u})$.
- { z : projection orthogonale de $\vec{OO}_1$ sur l'axe $(O, \vec{z})$.

Relations entre les systèmes de coordonnées cartésiennes et cylindriques

Si l'on définit la position du point O_1 par les cinq paramètres x, y, z, r et θ , il existe entre eux $q = 5 - 3 = 2$ relations indépendantes.

Ces deux relations s'obtiennent en projetant le vecteur $\vec{OH}$ sur $\vec{x}$ et $\vec{y}$:

$$\begin{aligned} x &= r \cos \theta \\ y &= r \sin \theta. \end{aligned}$$

4.1.3. Coordonnées sphériques

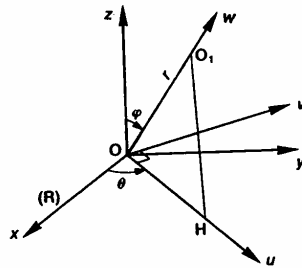


Fig. 19

Soit

$\left\{ \begin{array}{l} H \text{ la projection orthogonale du point } O_1 \text{ sur le plan } (O, \vec{x}, \vec{y}). \\ \vec{u} \text{ un vecteur unitaire de direction } OH. \\ \vec{v} \text{ le troisième vecteur unitaire de la base orthonormée directe } (\vec{z}, \vec{u}, \vec{v}). \\ \vec{w} \text{ un vecteur unitaire de direction } OO_1. \end{array} \right.$

Les coordonnées sphériques du point O_1 dans le repère R sont :

$\left\{ \begin{array}{l} r = \overline{OO_1} : \text{mesure algébrique de } \overline{OO_1} \text{ sur l'axe } (O, \vec{w}). \\ \theta = (\vec{z}, \vec{u}) : \text{angle orienté par le vecteur unitaire } \vec{z} \text{ normal au plan } (\vec{x}, \vec{u}). \\ \varphi = (\vec{z}, \vec{w}) : \text{angle orienté par le vecteur unitaire } \vec{v} \text{ normal au plan } (\vec{z}, \vec{w}). \end{array} \right.$

Relations entre les systèmes de coordonnées cartésiennes et sphériques

Si l'on définit la position du point O_1 par les six paramètres $x, y, z, r, \theta, \varphi$, il existe entre eux $q = 6 - 3 = 3$ relations indépendantes. Ces trois relations s'obtiennent en projetant le vecteur $\overline{OO_1}$ sur $\vec{x}, \vec{y}$ et $\vec{z}$:

$$\begin{cases} x = r \sin \varphi \cos \theta \\ y = r \sin \varphi \sin \theta \\ z = r \cos \varphi \end{cases}$$

4.2. PARAMÉTRAGE DE L'ORIENTATION DE LA BASE $(\vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$

4.2.1. Nombre de paramètres indépendants positionnant un solide dans un repère

Soient O_1, O_2, O_3 trois points non alignés du solide (S). Si l'on se donne la position des trois points $O_1,$

O_2, O_3 de (S) dans R , la position de (S) dans R est parfaitement déterminée, mais les neuf paramètres introduits sont dépendants. En effet, il existe entre eux les trois relations indépendantes suivantes :

$$\begin{aligned} \|\overline{O_1 O_2}\| &= \text{Cte} \\ \|\overline{O_2 O_3}\| &= \text{Cte} \\ \|\overline{O_3 O_1}\| &= \text{Cte}. \end{aligned}$$

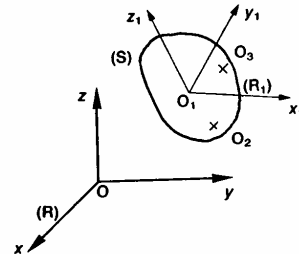


Fig. 20

En adoptant un raisonnement analogue à celui du paragraphe 4.1.1., nous dirons que : le nombre de paramètres indépendants qui positionnent (S) dans R est égal au nombre de paramètres introduits a priori (9) moins le nombre de relations indépendantes entre ces paramètres (3).

Par conséquent, le nombre de paramètres indépendants qui positionnent (S) dans R est de $9 - 3 = 6$. Trois paramètres sont nécessaires pour définir la position de O_1 dans R .

Par suite, il faut et il suffit de trois paramètres indépendants pour orienter la base $(\vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$ du repère R_1 par rapport à la base $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ du repère R . Les trois paramètres choisis habituellement sont les trois angles d'Euler.

4.2.2. Angles d'Euler

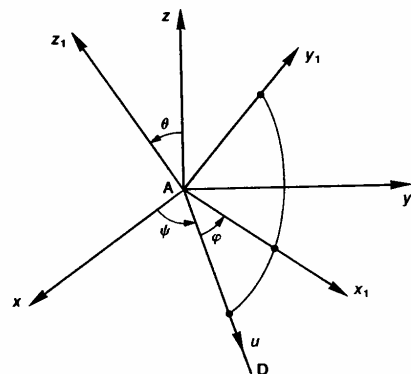


Fig. 21. Angles d'Euler

Plaçons les six origines des représentants des vecteurs libres $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1$ en un même point A (figure 21).

Soit D la droite d'intersection des plans (A, $\vec{x}_1, \vec{y}_1$) et (A, $\vec{x}, \vec{y}$).

Soit $\vec{u}$ un vecteur unitaire de direction D. Les trois angles d'Euler sont les suivants :

$$\begin{cases} \psi = (\vec{x}, \vec{u}) : \text{angle orienté par } \vec{z}, \\ \theta = (\vec{z}, \vec{z}_1) : \text{angle orienté par } \vec{u}, \\ \varphi = (\vec{u}, \vec{x}_1) : \text{angle orienté par } \vec{z}_1. \end{cases}$$

Vocabulaire

Ces trois angles qui sont utilisés dans l'étude du mouvement gyroscopique portent les noms suivants :

$$\begin{cases} \psi : \text{angle de précession,} \\ \theta : \text{angle de nutation,} \\ \varphi : \text{angle de rotation propre.} \end{cases}$$

La droite D est appelée axe nodal ou ligne des nœuds.

Bases intermédiaires

On peut considérer que ces trois angles correspondent à trois rotations planes successives, qui permettent de faire coïncider la base $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ avec la base $(\vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$, ce qui définit au passage deux bases intermédiaires, orthonormées directes (figure 22).

Première rotation

$$(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}) \xrightarrow{\text{Rot}(\vec{z}, \psi)} (\vec{u}, \vec{v}, \vec{z}).$$

Deuxième rotation

$$(\vec{u}, \vec{v}, \vec{z}) \xrightarrow{\text{Rot}(\vec{u}, \theta)} (\vec{u}, \vec{w}, \vec{z}_1).$$

Troisième rotation

$$(\vec{u}, \vec{w}, \vec{z}_1) \xrightarrow{\text{Rot}(\vec{z}_1, \varphi)} (\vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1).$$

La base $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{z})$ est appelée première base intermédiaire.

La base $(\vec{u}, \vec{w}, \vec{z}_1)$ est appelée deuxième base intermédiaire.

REMARQUE

Les angles ψ et φ ne sont plus définis lorsque $\theta = 0$.

4.2.3. Cas particulier : Solide linéaire rectiligne

Soit un solide (S) que l'on peut assimiler à un segment de droite O_1O_2 .

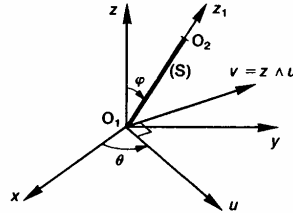


Fig. 23

Soit $(O_1, \vec{z}_1)$ un axe lié à (S) de support O_1O_2 . Par un raisonnement analogue à celui tenu au paragraphe 4.2.1., on montre aisément que la position de (S) dans R est fonction de cinq paramètres indépendants.

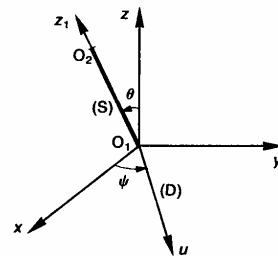


Fig. 24

Trois paramètres sont nécessaires pour positionner le point O_1 dans R. Il en reste donc deux pour orienter (S) autour du point O_1 . On choisit généralement deux angles dans l'un ou l'autre des paramétrages suivants :

— Angles d'Euler ψ et θ .

La droite D est l'intersection du plan $(O_1, \vec{x}, \vec{y})$ avec le plan perpendiculaire en O_1 à $\vec{z}_1$ (figure 23).

— Angles θ et φ du paramétrage sphérique d'un point (figure 24).

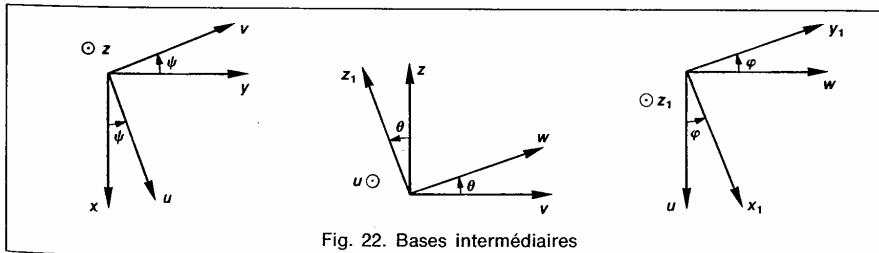


Fig. 22. Bases intermédiaires

5. SCHEMA CINEMATIQUE DES MECANISMES

Un schéma cinématique de mécanisme est un schéma qui doit, non seulement, permettre la compréhension des différents mouvements du mécanisme, mais aussi comporter le paramétrage des différents solides qui le constituent, en vue des calculs de cinématique, d'efforts, de cinétique..., que l'on peut avoir à faire sur ce mécanisme. Pour établir ce schéma, à partir du dessin de définition du mécanisme, il faut :

5.1. MODÉLISER LES LIAISONS DU MÉCANISME

Chaque liaison doit être modélisée globalement, de façon à ne faire apparaître sur le schéma cinématique que les liaisons qui sont strictement nécessaires à la compréhension du fonctionnement du mécanisme et à son paramétrage.

EXEMPLE 1

Plusieurs pièces ayant entre elles des liaisons encastrement peuvent être modélisées par une seule pièce.

Définitions

Deux pièces n'ayant aucun mouvement relatif sont dites cinématiquement équivalentes. Par suite, un ensemble de pièces cinématiquement équivalentes constitue une classe d'équivalence cinématique.

Notations

Si on note, par exemple, la classe d'équivalence cinématique par le numéro 3 on peut repérer les pièces appartenant à cette classe d'équivalence par les numéros 30, 31, 32, ..., 39.

EXEMPLE 2

Si le montage de l'arbre dans un palier, sur deux roulements, de l'exemple 2 du paragraphe 2.12 est considéré comme faisant partie d'un mécanisme, il sera modélisé par une liaison pivot.

Par contre, si l'on veut étudier en détail le montage de cet arbre dans son palier, il faudra établir un schéma cinématique mettant en évidence les modèles de liaison relatifs au montage de chaque roulement.

5.2. POSITIONNER LES LIAISONS NORMALISÉES ET LES SOLIDES SCHÉMATISÉS

On place sur le schéma cinématique les différentes liaisons symbolisées, suivant la norme, dans la position relative qu'elles ont sur le dessin de définition, et on les relie par les solides schématisés

5.3. PARAMÉTRER LA POSITION DES SOLIDES SCHÉMATISÉS

Pour cela, commencer par lier aux solides de repères (orthonormés directs) en tenant compte de liaisons que ces solides ont entre eux, de façon à simplifier le paramétrage. Ensuite, définir des paramètres de position entre ces différents repères :

REMARQUE

Faire des schémas de telle façon que les projections des vecteurs sur les axes soient positives, et que les angles entre les vecteurs soient compris entre 0 et $\frac{\pi}{2}$, (le cas échéant modifier la position relative des pièces), dans but de pouvoir s'aider par la suite des schémas pour calculer les projections de vecteurs et produits vectoriels.

EXEMPLE

Soit :
 $R(O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$: un repère orthonormé direct.
 $\vec{u}$: un vecteur unitaire perpendiculaire à $\vec{z}$.
 Posons : $\alpha = (\vec{x}, \vec{u})$.
 M : un point tel que : $\vec{OM} = r\vec{u}$, r algébrique.
 Sur la figure 25a, α et r sont positifs.
 — La projection orthogonale de $\vec{OM}$ sur $\vec{x}$ est égale à : $r \cos \alpha$.

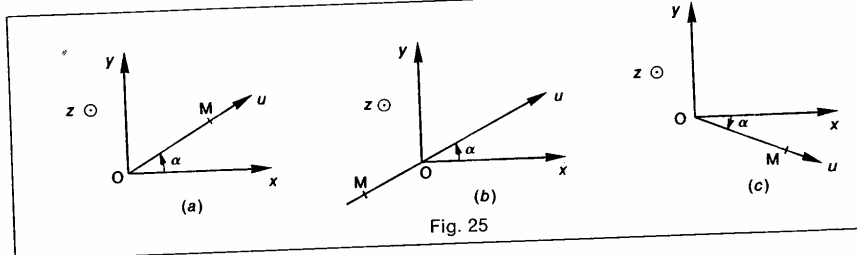


Fig. 25

C'est plus évident sur la figure 25a que sur la figure 25b dans laquelle $r < 0$.

— Le produit vectoriel $\vec{x} \wedge \vec{u}$ est égal à : $\sin \alpha \vec{z}$.

C'est plus évident sur la figure 25a que sur la figure 25c dans laquelle $\alpha < 0$.

EXEMPLE

Soit le réducteur dont le dessin d'ensemble est donné figure 26. L'engrenage est cylindrique droit à profil en développante de cercle, d'angle de pression $\alpha = 20^\circ$.

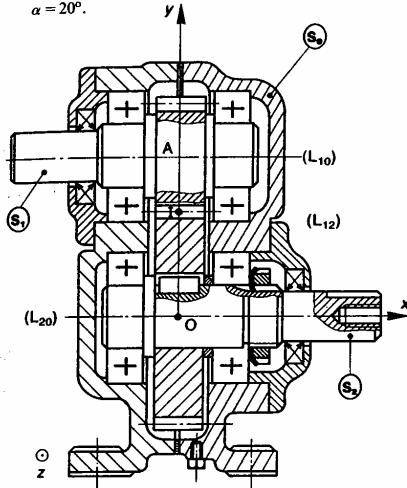


Fig. 26

Pour établir le schéma cinématique de ce réducteur, considérons qu'il est constitué de trois classes d'équivalence cinématique représentées par (S_1) , (S_2) et (S_0) .

Soit $R(O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ un repère orthonormé direct lié à (S_0) , placé comme l'indique le dessin.

Modélisons les liaisons entre ces solides de la façon suivante :

L_{10} : liaison pivot d'axe $(A, \vec{x})$.

L_{20} : liaison pivot d'axe $(O, \vec{x})$.

L_{12} : liaison linéique rectiligne d'axe $(I, \vec{x})$ et de normale orientée suivant la droite de pression de l'engrenage.

Dans ces conditions nous pouvons réaliser le schéma cinématique du mécanisme (figure 27).

La schématisation d'une liaison linéique rectiligne entre les roues d'un engrenage est celle indiquée par le schéma.

Effectuons maintenant le paramétrage du schéma.

Soit $R_1(A, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$ un repère lié à (S_1) posons : $\theta_1 = (\vec{y}, \vec{y}_1)$.

Soit $R_2(O, \vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_2)$ un repère lié à (S_2) posons : $\theta_2 = (\vec{y}, \vec{y}_2)$.

Le schéma cinématique ainsi réalisé est complet, il est prêt à être utilisé pour des calculs de mécanique.

REMARQUE

Il arrive parfois que l'on prenne quelque liberté avec la normalisation des liaisons pour simplifier, ou pour rendre plus explicites, les schémas cinématiques.

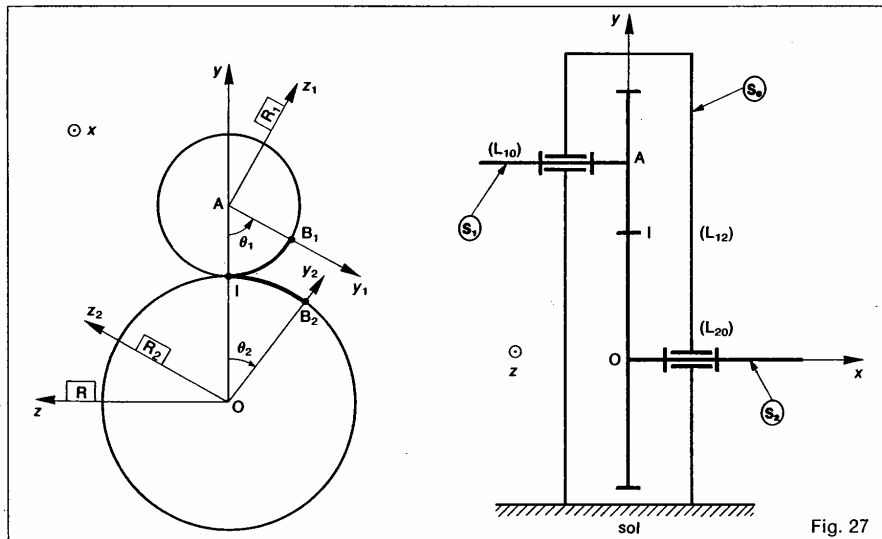


Fig. 27

6 LOI « ENTRÉE-SORTIE » D'UN MÉCANISME

Un sens de parcours de la chaîne cinématique étant fixé dans un mécanisme, on appelle loi « entrée-sortie » de ce mécanisme, la relation qui existe entre les paramètres de position de la pièce d'entrée et les paramètres de position de la pièce de sortie de ce mécanisme.

Application

Reprenons l'exemple du réducteur précédent. Notons r_1 et r_2 les rayons primitifs des deux roues de l'engrenage (figure 28).

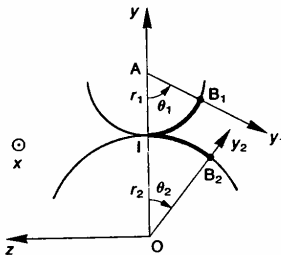


Fig. 28 Les cercles primitifs de l'engrenage roulent sans glisser l'un sur l'autre, par conséquent les points B_1 et B_2

coïncideront avec I, à une certaine date, si les arcs orientés $\widehat{IB}_1$ et $\widehat{IB}_2$ sont égaux.

Or $\widehat{IB}_1 = r_1 \theta_1$

et $\widehat{IB}_2 = -r_2 \theta_2$ ($\theta_2 < 0$ sur la figure).

Par suite, la loi « entrée-sortie » du mécanisme est :

$$r_1 \theta_1 = -r_2 \theta_2.$$

A SAVOIR

1. Les mouvements relatifs dans les liaisons élémentaires : ponctuelle, linéique rectiligne, linéique annulaire, rotule, appui plan, pivot glissant, glissière hélicoïdale, glissière, pivot.

2. Les coordonnées cartésiennes (x, y, z) , les coordonnées cylindriques (r, θ, z) , les coordonnées sphériques (r, θ, φ) ainsi que les relations entre ces différents systèmes de coordonnées

$$\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \\ x = r \sin \varphi \cos \theta \\ y = r \sin \varphi \sin \theta \\ z = r \cos \varphi \end{cases}$$

3. Les angles d'Euler (ψ, θ, φ) ainsi que leur définition et la construction des bases intermédiaires.

PROBLÈME RÉSOLU

Le dessin d'un mélangeur est donné figure 29.

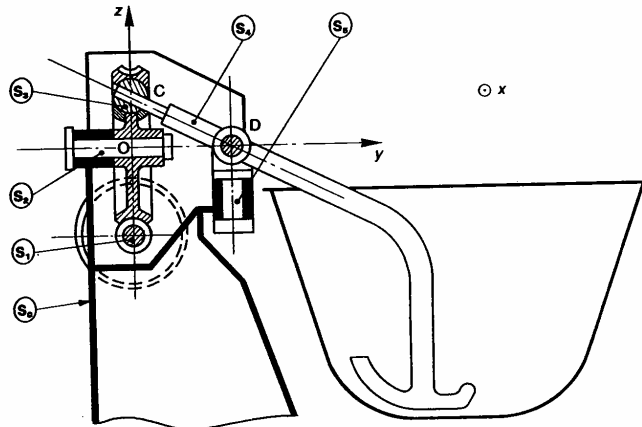


Fig. 2

Le moteur entraîne l'arbre (S_1) qui communique son mouvement au bras mélangeur (S_4) par l'intermédiaire d'un système roue et vis sans fin. La vis est à un filet à droite et la roue à n dents. (S_4) prend appui sur (S_2) par l'intermédiaire de (S_3), et sur (S_0) par l'intermédiaire de (S_5).

QUESTION 1

Établir un schéma cinématique spatial paramétré de ce mécanisme.

RÉPONSE

En décrivant la chaîne cinématique du mécanisme modélisons les liaisons et définissons en même temps les bases intermédiaires (figures 30 et 31).

Soit $R(O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ un repère lié à (S_0) tel que ($O, \vec{y}$) soit suivant l'axe de roue (S_2) et $\vec{x}$ de même direction que l'axe de la vis (S_1). L'origine O est placée dans le plan de section droite de (S_2) contenant le centre C de la rotule (S_3).

Les liaisons sont les suivantes :

— Entre (S_0) et (S_1) : liaison pivot d'axe ($B, \vec{x}$). Soit $R_1(B, \vec{x}, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$ un repère lié à (S_1). On pose $\alpha = (\vec{z}, \vec{z}_1)$.

— Entre (S_1) et (S_2) : (S_1) et (S_2) constituent un engrenage.

— Entre (S_2) et (S_3) : liaison rotule de centre C . Soit $R_2(O, \vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_2)$ un repère lié à (S_2) tel que le point C soit sur l'axe ($O, \vec{z}_2$). On pose : $\beta = (\vec{z}, \vec{z}_2)$.

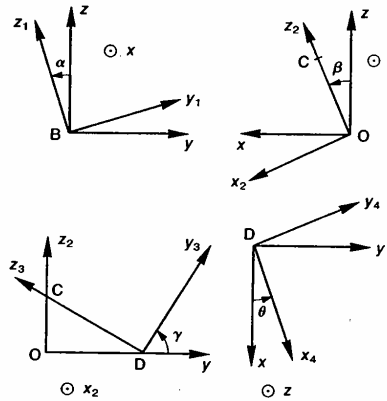


Fig. 31

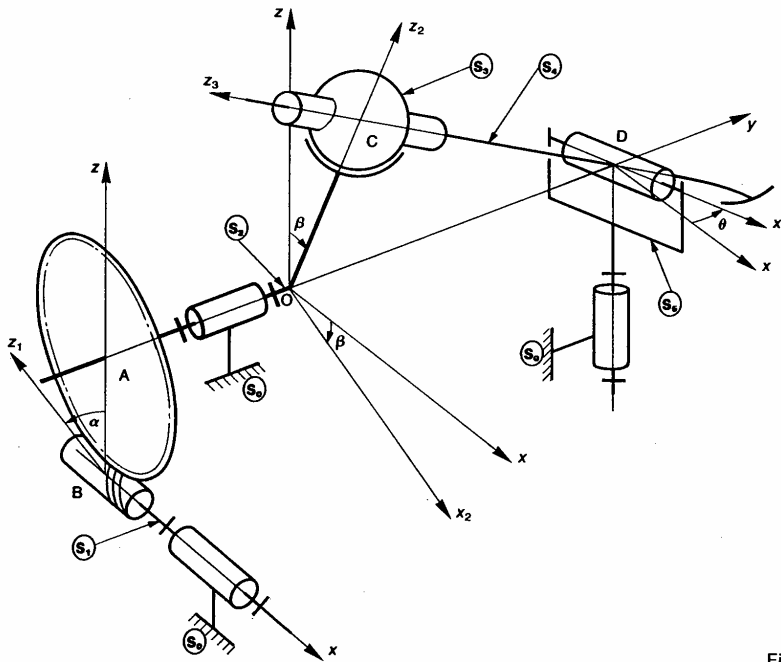


Fig. 30.

— Entre (S_3) et (S_4) : liaison pivot glissant d'axe CD.

D est un point fixe sur l'axe ($O, \vec{y}$).
Soit $R_3(D, \vec{x}_2, \vec{y}_3, \vec{z}_3)$ le repère tel que $\vec{z}_3$ soit dirigé suivant DC. On pose : $\gamma = (\vec{y}, \vec{y}_3)$. γ est un angle constant.

— Entre (S_0) et (S_5) : liaison pivot d'axe ($D, \vec{z}$).
Soit $R_4(\vec{x}_4, \vec{y}_4, \vec{z})$ un repère lié à (S_5). On pose : $\theta = (\vec{x}, \vec{x}_4)$.

— Entre (S_4) et (S_5) : liaison pivot d'axe ($D, \vec{x}_4$).

REMARQUES

— On passe de la base du repère R à la base du repère R_2 par une rotation autour de $\vec{y}$, vecteur unitaire de R, et de la base du repère R_2 à la base du repère R_3 par une rotation autour de $\vec{x}_2$, vecteur unitaire de R_2 . Ces bases se déduisent donc bien les unes des autres par rotation autour d'un vecteur unitaire de la précédente.

— Les bases intermédiaires sont entièrement définies par les figures planes de la figure 31. Il est donc préférable de ne pas porter tous les vecteurs unitaires sur le schéma cinématique de la figure 30 sinon celui-ci deviendrait vite inextricable.

QUESTION 2

Déterminer la loi « entrée-sortie » du mélangeur.

RÉPONSE

La pièce d'entrée du mécanisme est (S_1), paramétrée par α , et la pièce de sortie est (S_5), paramétrée par θ . Il s'agit de trouver la relation entre ces deux paramètres. Pour cela, remarquons que le paramétrage de la position de (S_4) par rapport à R s'établit à partir des paramétrages de (S_2) et (S_3) et que le paramétrage de (S_5) se fait directement par rapport à R.

Les positions de ces différents solides sont parfaitement déterminées, mais la continuité de la chaîne cinématique entre (S_4) et (S_5) n'a pas encore été exprimée. C'est en écrivant, qu'à

chaque instant, l'axe CD du bras du mélangeur (S_4) et l'axe ($D, \vec{x}_4$) de la liaison pivot entre (S_4) et (S_5) sont perpendiculaires qu'on obtient la loi « entrée-sortie » du mécanisme.

Soit $\vec{z}_3 \cdot \vec{x}_4 = 0$.

Pour effectuer ce produit scalaire cherchons les composantes de $\vec{z}_3$ et de $\vec{x}_4$ dans la base de R.

$$\begin{aligned}\vec{z}_3 &= -\sin \gamma \vec{y} + \cos \gamma \vec{z}_2 \\ &= -\sin \gamma \vec{y} + \cos \gamma (\sin \beta \vec{x} + \cos \beta \vec{z}) \\ &= \cos \gamma \sin \beta \vec{x} - \sin \gamma \vec{y} + \cos \gamma \cos \beta \vec{z}\end{aligned}$$

$$\text{et } \vec{x}_4 = \cos \theta \vec{x} + \sin \theta \vec{y}.$$

La loi « entrée-sortie » s'écrit donc :

$$\cos \theta \cos \gamma \sin \beta - \sin \theta \sin \gamma = 0.$$

En regardant la construction du mécanisme on constate que γ est différent de $\frac{\pi}{2}$ et que θ

n'atteint jamais la valeur $\pm \frac{\pi}{2}$. Par conséquent divisons les deux membres de l'équation précédente par $\cos \theta \cos \gamma$, d'où

$$\sin \beta = \tan \theta \tan \gamma.$$

Il ne reste plus qu'à exprimer β en fonction de α . La vis est à un filet à droite et la roue a n dents.

$$\text{Alors : } \beta = \frac{\alpha}{n}$$

si on suppose que $\beta = 0$ lorsque $\alpha = 0$.

Finalement la loi « entrée-sortie » s'écrit :

$$\sin \frac{\alpha}{n} = \tan \theta \tan \gamma.$$

REMARQUE

Si la vis est à gauche β diminue lorsque α augmente, donc $d\beta = -\frac{d\alpha}{n}$, et $\beta = -\frac{\alpha}{n}$.

CONSEILS POUR LA RÉOLUTION

1. Tracer des schémas cinématiques de telle façon que les angles entre les vecteurs de base soient compris entre 0 et $\frac{\pi}{2}$ afin d'utiliser les schémas dans les calculs.

2. Établir des paramétrages complets en définissant toutes les bases intermédiaires. Chaque base

devant s'obtenir par rotation autour d'un vecteur unitaire de la base précédente.

3. La loi entrée-sortie d'un mécanisme s'obtient en trouvant une relation géométrique simple entre le ou les paramètres d'entrée et le ou les paramètres de sortie du mécanisme.

En général, un produit scalaire ou vectoriel entre deux vecteurs unitaires des bases intermédiaires mises en place lors du paramétrage conduit au résultat.

EXERCICES AVEC RÉPONSES

1 — La figure 32 représente le guidage en rotation du plateau (2) dans le bâti (1) d'un montage d'usinage, par l'intermédiaire de l'arbre (3).

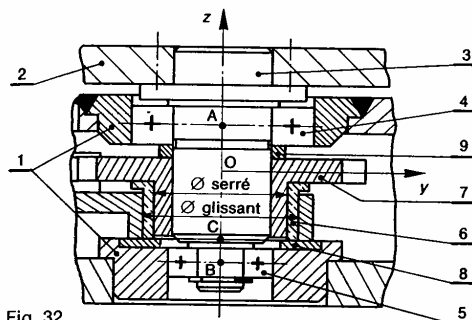


Fig. 32.

liaison est donc modélisable par une liaison linéique annulaire de centre A et de direction $\vec{z}$.

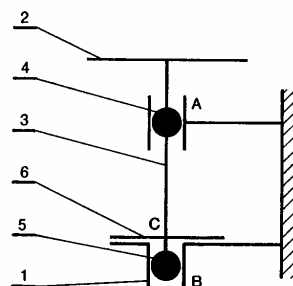


Fig. 33.

QUESTIONS

- 1° Modéliser la liaison entre le plateau (2) et l'arbre (3).
- 2° Modéliser les liaisons entre l'arbre (3) et le bâti (1).
- 3° Concevoir le schéma cinématique du mécanisme.

RÉPONSES

1° Le plateau est centré et épaulé sur l'arbre. Des vis représentées par les traits d'axe permettent de réaliser à partir de cette liaison pivot une liaison encastrement.

2° Le guidage de l'arbre dans le bâti est réalisé à l'aide de trois liaisons élémentaires.

a) L'angle de rotulage du roulement à billes (4) est supérieur à la déformation angulaire de l'arbre (3). Cette

b) En suivant le même raisonnement, la liaison entre l'arbre et le bâti réalisée par l'intermédiaire du roulement (5) est modélisable par une liaison linéique annulaire de centre B et de direction $\vec{z}$.

c) Le coussinet (6) lié à la roue à rochet (7) elle-même liée à l'arbre par l'intermédiaire de l'entretoise (9) et de la bague intérieure du roulement (4), est en liaison appui plan de normale (C, $\vec{z}$) avec la plaque d'appui (8) liée au bâti.

3° L'association de ces trois liaisons crée une liaison pivot unilatérale d'axe (O, $\vec{z}$) et dépend donc du sens des efforts.

2 — La figure 34 représente un mécanisme utilisé dans les silos à céréales permettant d'actionner un trieur à grains.

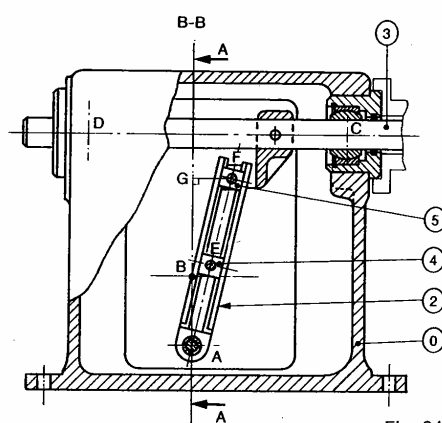
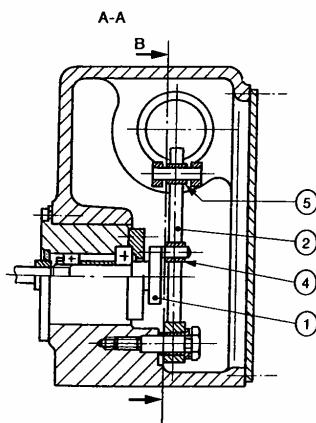


Fig. 34.

Un moteur électrique entraîne l'arbre (1) d'un mouvement de rotation uniforme. Par l'intermédiaire de la bielle (2), le coulisseau (3) est animé d'un mouvement de translation alternatif.

QUESTIONS

1° Modéliser les liaisons.

2° Concevoir les schémas cinématiques spatial et plan du mécanisme.

3° Paramétrer le schéma cinématique plan en précisant les bases intermédiaires.

4° Établir la loi « entrée-sortie », on pose : $AB=d$, $AG=h$, et a le rayon de la manivelle BE.

RÉPONSES

1° a) Bâti (0) - arbre (1) : pivot.

b) Bâti (0) - bielle (2) : pivot.

c) Bielle (2) - noix (4) : glissière.

d) Noix (4) - arbre (1) : pivot glissant.

e) Bielle (2) - noix (5) : glissière.

f) Noix (5) - arbre (3) : pivot glissant.

g) Arbre (3) - bâti (0) en C : linéique annulaire.

h) Arbre (3) - bâti (0) en D : linéique annulaire.

2° Les schémas cinématiques sont représentés figure 35 et 36.

Schéma spatial :

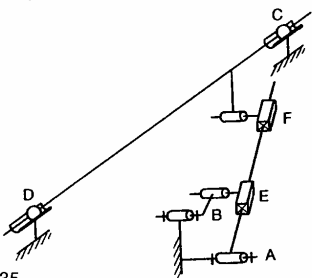


Fig. 35

Schéma plan :

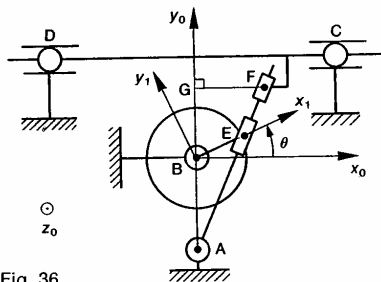


Fig. 36

3° Soit le repère $R_0(B, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$ lié au bâti (0) et le repère $R_1(B, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$ lié à l'arbre d'entrée (1) tel que l'axe $(B, \vec{x}_1)$ soit dirigé suivant BE. L'angle $\theta = (\vec{x}_0, \vec{x}_1)$ définit la position de (1) par rapport à (0). Le déplacement du coulisseau (3) par rapport au bâti est défini par $\vec{GF} = x\vec{x}_0$.

4° La loi « entrée-sortie » est :

$$x = h \frac{a \cos \theta}{d + a \sin \theta}$$

3 — Soit $R(O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ un repère lié à un bâti (S_0) (Figure 37).

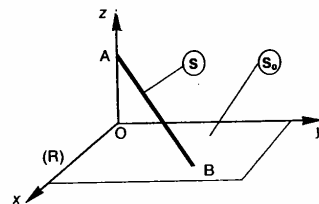


Fig. 37

Une tige (S) d'extrémités A et B a deux liaisons en A et B avec (S_0). La liaison en A est linéique annulaire d'axe $(A, \vec{z})$ et la liaison en B est ponctuelle en un point quelconque du plan $(O, \vec{x}, \vec{y})$.

QUESTIONS

1° Déterminer le nombre de paramètres indépendants nécessaires au positionnement de (S) par rapport à (S_0).

2° Choisir ces paramètres et préciser les bases intermédiaires.

RÉPONSES

1° Il faut cinq paramètres indépendants pour positionner un solide linéaire rectiligne par rapport à un repère. Mais les liaisons que (S) a avec (S_0) réduisent ce nombre de paramètres.

Notons (x_A, y_A, z_A) et (x_B, y_B, z_B) les coordonnées cartésiennes des points A et B, respectivement, dans R. La liaison linéique annulaire impose les conditions : $x_A=0$ et $y_A=0$.

La liaison ponctuelle impose la condition : $z_B=0$. Par suite, le nombre de paramètres indépendants positionnant (S) par rapport à (S_0) est égal à 5 moins le nombre de relations indépendantes imposées par les liaisons c'est-à-dire $5-3=2$ paramètres indépendants.

2° Choisissons deux angles pour définir la position de (S) par rapport à (S_0).

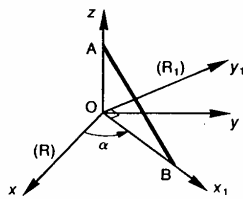


Fig. 38.

Soit $R_1(O, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$ le repère tel que l'axe $(O, \vec{x}_1)$ soit dirigé suivant OB .
Posons $\alpha = (\vec{z}, \vec{x}_1)$.

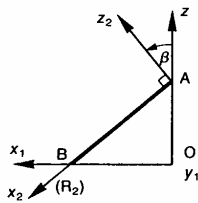


Fig. 39.

Soit $R_2(A, \vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_2)$ le repère tel que l'axe $(A, \vec{x}_2)$ soit dirigé suivant AB .

Posons : $\beta = (\vec{z}_1, \vec{z}_2)$.

Les deux angles α et β définissent la position de (S) par rapport à (S_0) . Les bases intermédiaires sont bien mises en place, en effet :

$$(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}) \xrightarrow{\text{Rot}(\alpha, \vec{z})} (\vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z})$$

$$(\vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}) \xrightarrow{\text{Rot}(\beta, \vec{y}_1)} (\vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_2).$$

4 — La figure 40 représente le régulateur centrifuge du système DIRAVI CITROËN entraîné à partir de la boîte de vitesses par un flexible monté sur l'arbre (20). Ce système permet de « durcir » la direction en fonction de la vitesse du véhicule.

QUESTIONS

1° Modéliser les liaisons (excepté le limiteur de couple constitué des pièces (22), (23), (24), (25), (26) que l'on suppose liées à l'arbre (20)).

2° Tracer le schéma cinématique correspondant. Repérer les ensembles de pièces cinématiquement liées par leur numéro de classe d'équivalence. (Exemple : {90, 91, 92} sera repéré par 9.)

3° Paramétrer la position d'une masselotte par rapport au bâti.

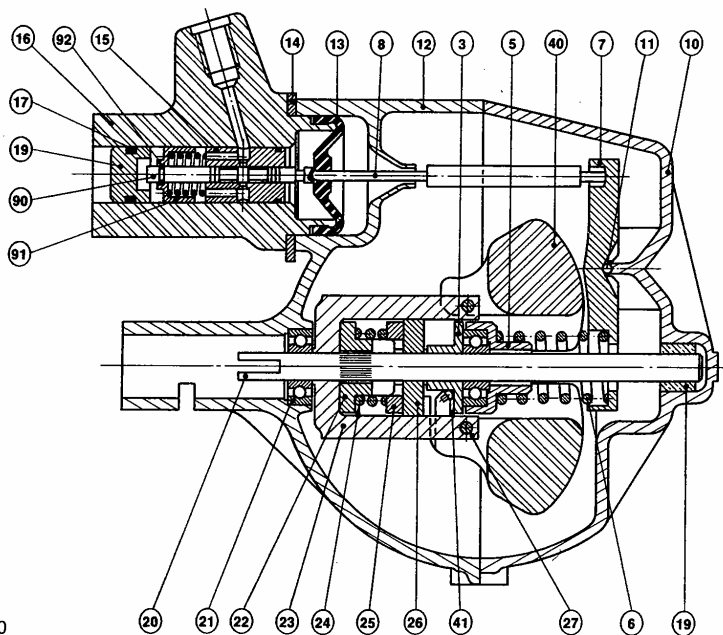


Fig. 40

RÉPONSES

- 1° a) Bâti (1) - arbre (20) par l'intermédiaire du roulement (21) : rotule.
 b) Bâti (1) - arbre (20) par l'intermédiaire du coussinet (9) : pivot glissant.
 c) Arbre (20) - fourreau (23) : encastrement.
 d) Fourreau (23) - masselottes (40) : pivot.
 e) Masselottes (40) - glace de butée (3) : ponctuelle.
 f) Glace de butée (3) - butée à billes (5) : appui plan.
 g) Butée à billes (5) - ressort (6) : appui plan.
 h) Ressort (6) - levier (7) : appui plan.
 i) Levier (7) - bâti (1) : rotule.
 j) Levier (7) - tige (8) : rotule.
 k) Tige (8) - tiroir distributeur (9) : rotule.
 l) Tiroir distributeur (9) - bâti (1) : pivot glissant.
 m) Glace de butée (3) - arbre (20) : pivot glissant.
 2° Le schéma cinématique est représenté figure 41.

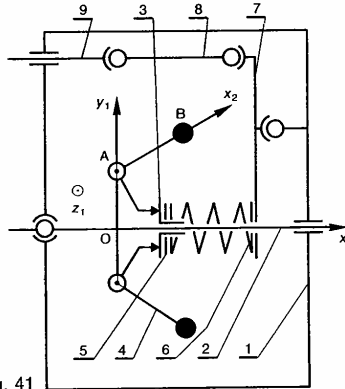


Fig. 41

3° Soit $R(O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ un repère lié au bâti (1), l'axe $(O, \vec{x})$ étant placé suivant l'axe de l'arbre (2). Soient $R_1(O, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$ un repère lié à l'arbre (2) et $R_2(A, \vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_2)$ un repère lié à la masselotte (4) tels que $(A, \vec{z}_1)$ soit placé suivant l'axe de la liaison pivot entre (4) et (2), et que l'axe $(A, \vec{x}_2)$ passe par le centre de gravité B de la masselotte (4).

On pose : $\begin{cases} \theta_1 = (\vec{y}, \vec{y}_1) \\ \theta_2 = (\vec{x}, \vec{x}_2) \end{cases}$

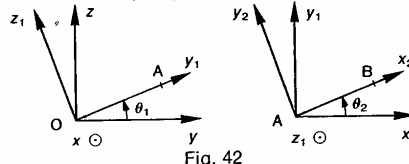


Fig. 42

5 — Le joint articulé dit de CARDAN permet de transmettre une puissance entre deux arbres concourants (angle de brisure $\alpha < 45^\circ$). Son schéma cinématique est donné figure 43.

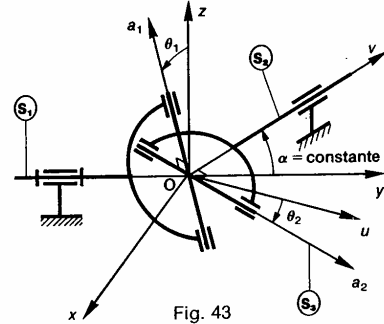


Fig. 43

L'arbre d'entrée (S_1) est relié à l'arbre de sortie (S_2) par un croisillon (S_3).

QUESTIONS

1° Paramétrer le mécanisme, en précisant les bases intermédiaires.

2° Déterminer la loi « entrée-sortie ».

RÉPONSES

1° La relation entre $\theta_2(t)$ et $\theta_1(t)$ est obtenue en exprimant que $\vec{a}_1 \cdot \vec{a}_2 = 0$. Pour cela, utiliser les bases intermédiaires définies sur la figure 44.

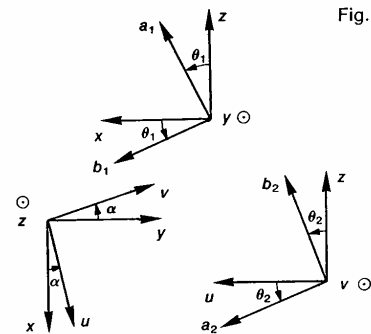


Fig. 44

2° La loi entrée-sortie est :

$$\operatorname{tg} \theta_2 = \cos \alpha \operatorname{tg} \theta_1.$$

Si $\cos \theta_2 \neq 0$ et $\cos \theta_1 \neq 0$.

EXERCICES SANS RÉPONSE

6 — Les figures 45 et 46 représentent un joint de OLDHAM permettant de transmettre une puissance entre deux arbres parallèles.

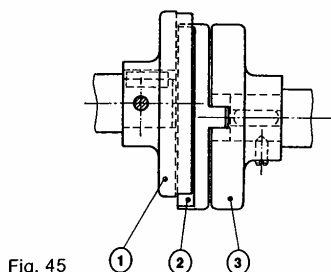


Fig. 45

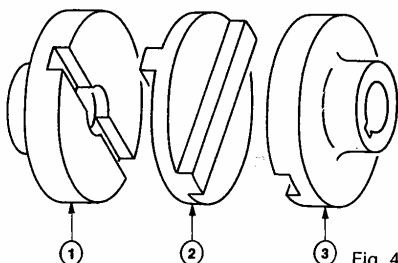


Fig. 46

QUESTIONS

1° Modéliser les liaisons.

2° Concevoir un schéma cinématique paramétré. Préciser les bases intermédiaires.

3° Montrer que ce joint articulé est homocinéétique.

7 — Soient les trois liaisons, entre deux solides (S_1) et (S_2) :

a) Liaison linéique rectiligne entre un demi-cylindre de révolution (S_2) et la surface plane (S_1) (fig. 47a).

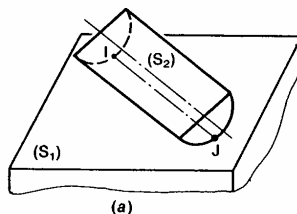
b) Liaison ponctuelle entre un disque de faible épaisseur (S_2) et la surface plane (S_1) (fig. 47b).

c) Liaison ponctuelle entre une toupie (S_2) et la surface plane (S_1) (fig. 47c).

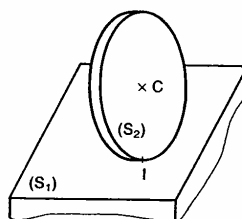
QUESTIONS

1° Déterminer le nombre de paramètres indépendants nécessaires au positionnement d'un solide par rapport à l'autre.

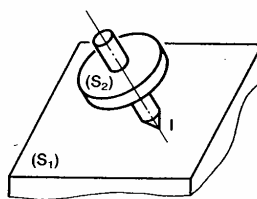
2° Choisir ces paramètres et préciser les bases intermédiaires. (Si les paramètres choisis ne sont pas indépendants, donner les relations qui existent entre ces paramètres.)



(a)



(b)



(c)

Fig. 47

8 — La figure 48 donne le dessin d'ensemble d'un petit moteur à vapeur pour modèle réduit.

Le déplacement du piston (11) dans le cylindre (2) permet par l'intermédiaire d'un système bielle manivelle d'obtenir la rotation de l'arbre (8) par rapport au bâti (1).

QUESTIONS

1° Modéliser les liaisons entre les différentes pièces.

2° Établir le schéma cinématique du mécanisme.

3° Définir les bases intermédiaires et choisir le paramétrage.

4° Établir la loi « entrée-sortie ».

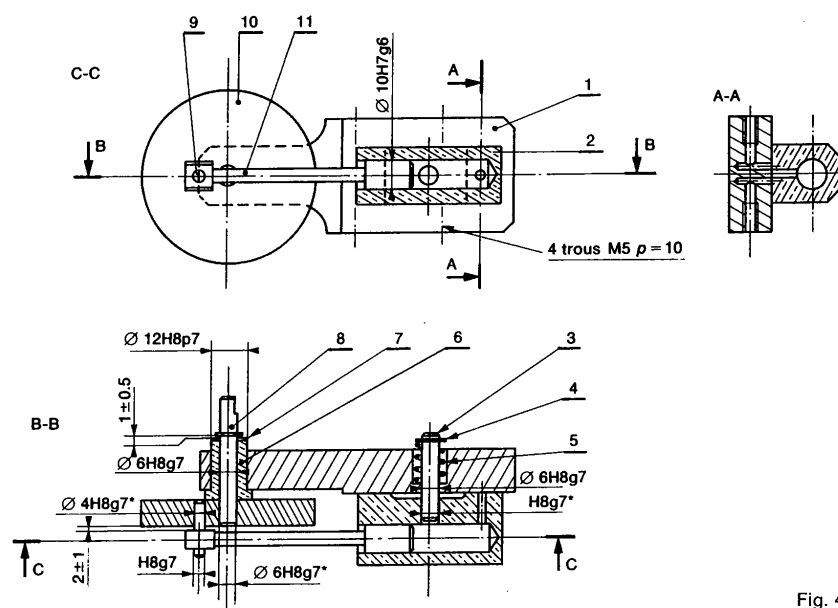


Fig. 48

* Collage époxy.

11	1	Piston	XC 42	Chromé
10	1	Volant	E 24	Chromé
9	1	Téton	XC 42	Chromé
8	1	Arbre	XC 42	Chromé
7	1	Rondelle M6	Polyamide	
6	1	Palier	UE 9 P	
5	1	Ressort ($\varnothing$ fil = 0,8)		
4	2	Anneau Truarc « E »		
3	1	Pivot	XC 42	
2	1	Cylindre	UE 9 P	Polissage
1	1	Bâti	E 24	Nickelé noir
Rp	Nb	Désignation	Matière	Obs.

9 — Le dessin d'une machine d'essai de fatigue en flexion est donné figure 49.

Les éprouvettes sont fixées à l'une de leurs extrémités au support (20) et appuyées à l'autre sur le bâti par l'intermédiaire des axes (38).

Un moteur électrique non représenté sur le dessin entraîne l'arbre (6) à l'aide d'une transmission par poulies courroie (2)-(1).

QUESTIONS

1° Modéliser les liaisons entre les différentes pièces.

2° Établir le schéma cinématique du mécanisme.

3° Définir les bases intermédiaires et choisir le paramétrage.

4° Établir la loi « entrée-sortie ».

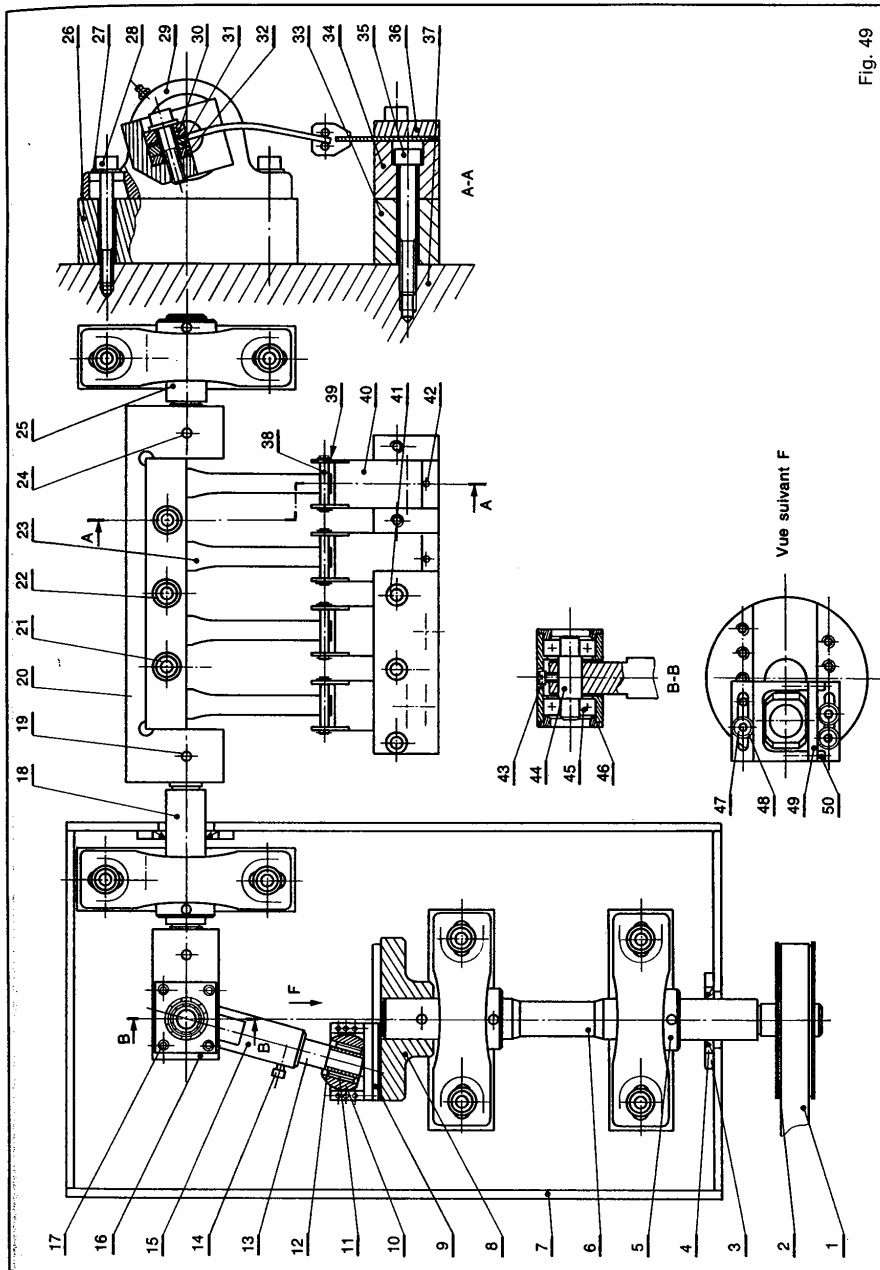


Fig. 49

28	Vis CHc M 8-65	8							
27	Rondelle M 8 N	8							
26	Cale	4	1						
25	Axe	1	3						
24	Goup. élast. ep. 5-40	1							
23	Éprouv.	4							
22	Rondelle M 8 N	3							
21	Vis CHc M 8-35	3							
20	Berceau	1	4						
19	Goupille conique	3					R 6-65		
18	Axe	1	3						
17	Vis CHc M 5-10	8							
16	Pièce d'entrain	1	3						
15	Chape	1	2						
14	Vis CHc M 5-10	1							
13	Axe	1	2					Stubs Ø 15	
12	Bague int INA	1						IR 12 x 15 x 22,5	
11	Douille HK 1516	1						INA	
10	Noix	1	2	Z 200 C 13	TH 970 Rev 260				
9	Coulisseau	1	2	A 50					
8	Plateau	1	1						
7	Cartier	1		pmma					
6	Axe	1	1						
5	Bague d'arrêt	4							
4	Joint	2						25-40-5	
3	Support de joint	2		pmma				collé sur 7	
2	Poulie crée	1						30 L 075	
1	Courroie crée	1						420 L 075	
Re- père	Désign. abrégée	Nombre	n° de dess.	Nat. État	Traitement thermique	Brut Fini	Poids	Observ.	

50	Vis CHc M 4-10	4							
49	Plaque	1	2	A 50					
48	Rondelle Z 6 U	3							
47	Vis CHc M 6-15	3							
46	Chapeau	2	3						
45	Roult 6201	2						12-32-10	
44	Axe	1	3						
43	Vis CHc M 5-8	1							
42	Butée	4						Stubs Ø 4	
41	Vis CHc M 8-20	5							
40	Lame	4	5						
39	Anneau élast. 5 x 0,6	16							
38	Axe	8	5					Stubs Ø 5	
37	Bâtit	1							
36	Plaque de serrage	1	5						
35	Vis CHc M 10-70	2							
34	Support des lames	1	5						
33	Socle	1	5						
32	Cale	1	4						
31	Pièce d'encast	1	4						
30	Plaque de serrage	1	4						
29	Palier	4						SY 25 FJ	
Repère	Désign. abrégée	Nombre	n° de dess.	Nat. Ét.	Traitement thermique	Observ.			

10 — Un variateur GUSA est constitué de trois mécanismes d'entraînement similaires à la figure 50. L'arbre d'entrée (1) entraîne en rotation la bielle (2) au moyen d'un excentrique. Le mouvement est transmis à la pièce (3) guidée par l'ensemble (4), (5). L'arbre de sortie (8) est entraîné par la pièce (7) au moyen d'une roue libre. La variation de vitesse est obtenue par translation du support (5).

QUESTIONS

- 1° Modéliser les liaisons entre les différentes pièces.
- 2° Établir un schéma cinématique spatial du mécanisme.
- 3° Définir les bases intermédiaires et choisir le paramétrage.
- 4° Établir la loi « entrée-sortie ».

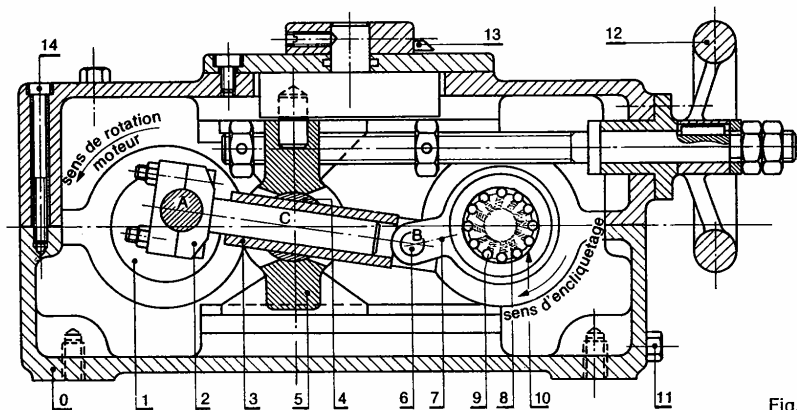


Fig. 50

2 Vecteurs position, vitesse et accélération d'un point d'un solide

Savoir calculer le vecteur vitesse d'un point d'un solide est utile, par exemple, pour établir la relation entre la vitesse d'entrée et la vitesse de sortie d'un mécanisme.

Savoir calculer le vecteur accélération d'un point d'un solide est indispensable pour appliquer le principe fondamental de la dynamique.

Avant de définir ces deux notions de vecteur vitesse et de vecteur accélération, nous introduirons la notion de vecteur position d'un point d'un solide, après avoir indiqué au préalable la façon de mesurer le temps.

1 MESURE DU TEMPS

La notion d'écoulement du temps, de manière régulière et irréversible, est donnée à l'observateur par des mouvements particuliers appelés horloges.

EXEMPLES

1. Mouvement d'un balancier de pendule.
2. Mouvement de certains astres.
3. Oscillations d'un quartz, entretenues électriquement (horloges à quartz).
4. Oscillations d'atomes de césium dans le vide (horloges atomiques).

On mesure le temps en représentant l'état de l'horloge sur un repère à une dimension, appelé **repère de temps**, orienté dans le sens de la succession des événements dans le temps.

Chaque point de ce repère est appelé **instant**.

L'abscisse de l'instant est appelé **date** (généralement désignée par la lettre t).

La **durée** entre deux instants (1) et (2), (1) précédant (2) dans l'ordre chronologique, de dates t_1 et t_2 , est la différence $t_2 - t_1$ (figure 1).

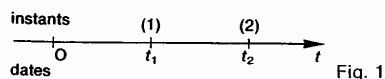


Fig. 1

L'unité de durée est la **seconde**.

La définition de la seconde adoptée par la 13^e conférence générale des poids et mesures en 1967 est la suivante :

Définition

La seconde est l'unité de mesure du temps équivalant à la durée de 9 192 631 770 périodes de la radiation correspondant à la transition entre les deux niveaux hyperfins de l'état fondamental de l'atome de césium 133.

REMARQUE

Le césium a été découvert en 1861 par Bunsen et Kirchhoff, grâce à l'analyse spectrale. C'est un métal alcalin analogue au potassium, mou, jaune pâle, de densité 1,9, fondant à 28 °C et bouillant à 670 °C.

2. VECTEUR POSITION D'UN POINT D'UN SOLIDE

Notons t la variable qui mesure le temps.

Soit (S) un solide en mouvement par rapport à un repère $R(O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$.

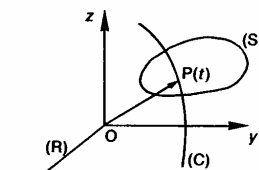


Fig. 2

Au cours de ce mouvement, un point $P(t)$ quelconque du solide (S) décrit dans le repère R une courbe (C) appelée trajectoire du point $P(t)$ dans le repère R.

Définition

Le vecteur position du point $P(t)$ du solide (S), dans le repère R, à la date t , est le vecteur $\overrightarrow{OP}(t)$, où O est l'origine du repère R.

3. VECTEUR VITESSE D'UN POINT D'UN SOLIDE

3.1. DÉFINITION

Le vecteur vitesse du point $P(t)$ du solide (S) par rapport au repère R, à la date t , est la dérivée par rapport à t , pour un observateur lié au repère R, du vecteur position $\overrightarrow{OP}(t)$.

$$\vec{V}(P/R) = \left[\frac{d}{dt} \overrightarrow{OP}(t) \right]_R$$

REMARQUE

La variation de $\overrightarrow{OP}(t)$, que la dérivée représente, est étudiée par rapport à un observateur lié au repère R.

3.2. INTERPRÉTATION GÉOMÉTRIQUE

En reprenant la définition de la dérivée d'un vecteur, $\vec{V}(P/R)$ s'écrit :

$$\vec{V}(P/R) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\overrightarrow{OP}(t + \Delta t) - \overrightarrow{OP}(t)}{\Delta t}$$

(Δt représentant un petit accroissement de la variable t). Or

$$\overrightarrow{OP}(t + \Delta t) - \overrightarrow{OP}(t) = \overrightarrow{P(t)P(t + \Delta t)}.$$

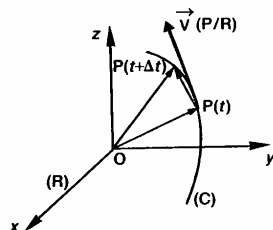


Fig. 3

Lorsque $\Delta t \rightarrow 0$, la direction du vecteur $\overrightarrow{P(t)P(t + \Delta t)}$ tend vers la direction de la tangente à la trajectoire (C), au point $P(t)$. Le vecteur vitesse $\vec{V}(P/R)$ a donc même direction que la tangente à la trajectoire (C), au point $P(t)$.

3.3. UNITÉ

La norme du vecteur vitesse est homogène à une longueur divisée par un temps. Si la longueur est exprimée en mètres (m) et le temps en secondes (s) la norme du vecteur vitesse s'exprime en mètres par seconde (m/s).

4. VECTEUR ACCÉLÉRATION D'UN POINT D'UN SOLIDE

4.1. DÉFINITION

Le vecteur accélération du point $P(t)$ du solide (S), par rapport au repère R, à la date t , est la dérivée par rapport à t , pour un observateur au repère R, du vecteur vitesse $\vec{V}(P/R)$.

$$\vec{\Gamma}(P/R) = \left[\frac{d}{dt} \vec{V}(P/R) \right]_R$$

4.2. INTERPRÉTATION GÉOMÉTRIQUE

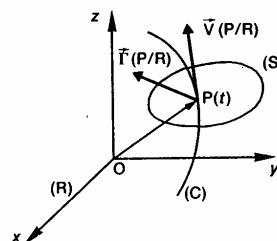


Fig. 4

Soit A un point quelconque du repère R.
Soit (H) la trajectoire du point B(t) défini par
 $\vec{AB}(t) = \vec{V}(P/R)$

alors

$$\vec{\Gamma}(P/R) = \left[\frac{d}{dt} \vec{AB}(t) \right]_R$$

Par suite, et par analogie avec ce qui a été fait pour le vecteur vitesse, on en déduit que le vecteur accélération $\vec{\Gamma}(P/R)$ est un vecteur de même direction que la tangente à la courbe (H), au point B(t).

La courbe (H) est appelée hodographe du vecteur vitesse $\vec{V}(P/R)$, relatif au point A.

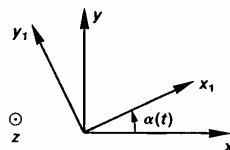


Fig. 5

Calculons $\left[\frac{d}{dt} \vec{U}(t) \right]_R$:

$$\begin{aligned} \left[\frac{d}{dt} \vec{U}(t) \right]_R &= \left[\frac{d}{dt} (a\vec{x}_1 + b\vec{y}_1 + c\vec{z}) \right]_R \\ &= a'\vec{x}_1 + a \left[\frac{d\vec{x}_1}{dt} \right]_R + b'\vec{y}_1 + b \left[\frac{d\vec{y}_1}{dt} \right]_R + c'\vec{z} + c \left[\frac{d\vec{z}}{dt} \right]_R \end{aligned}$$

avec $a' = \frac{da}{dt}$, $b' = \frac{db}{dt}$, $c' = \frac{dc}{dt}$,

le vecteur $\left[\frac{d\vec{z}}{dt} \right]_R$ est nul car $\vec{z}$ est fixe dans la base de R.

Le vecteur $a'\vec{x}_1 + b'\vec{y}_1 + c'\vec{z}$ présente la dérivée du vecteur $\vec{U}(t)$ dans la base de R_1 .

Par suite :

$$\left[\frac{d\vec{U}(t)}{dt} \right]_R = \left[\frac{d}{dt} \vec{U}(t) \right]_{R_1} + a \left[\frac{d\vec{x}_1}{dt} \right]_R + b \left[\frac{d\vec{y}_1}{dt} \right]_R \quad (1)$$

Calculons maintenant $\left[\frac{d\vec{x}_1}{dt} \right]_R$.

L'orientation de $\vec{x}_1$ dans R est fonction de l'angle $\alpha(t)$. Par conséquent, $\vec{x}_1$ peut être considéré comme une fonction de t par l'intermédiaire de l'angle $\alpha(t)$, soit $\vec{x}_1[\alpha(t)]$. Par suite, en appliquant le résultat sur la dérivée d'une fonction de fonction, on peut écrire que :

$$\left[\frac{d\vec{x}_1}{dt} \right]_R = \left[\frac{d\vec{x}_1}{d\alpha} \right]_R \alpha'$$

avec

$$\alpha' = \frac{d\alpha}{dt}$$

Pour calculer $\left[\frac{d\vec{x}_1}{d\alpha} \right]_R$ exprimons $\vec{x}_1$ sur la base du repère R :

$$\begin{aligned} \left[\frac{d\vec{x}_1}{d\alpha} \right]_R &= \left[\frac{d}{d\alpha} (\cos \alpha \vec{x} + \sin \alpha \vec{y}) \right]_R \\ &= -\sin \alpha \vec{x} + \cos \alpha \vec{y} \\ &= \vec{y}_1 \\ &= \vec{z} \wedge \vec{x}_1. \end{aligned}$$

donc

$$\left[\frac{d\vec{x}_1}{d\alpha} \right]_R = \vec{z} \wedge \vec{x}_1. \quad (2)$$

Ce résultat s'interprète en disant que la dérivée du vecteur $\vec{x}_1$ par rapport à son angle polaire α est le

4.3. UNITÉ

La norme du vecteur accélération est homogène à une longueur divisée par un temps au carré. Si la longueur est exprimée en mètres (m) et le temps en secondes (s) la norme du vecteur accélération s'exprimera en mètres par seconde carré (m/s²).

5. CALCUL DU VECTEUR VITESSE ET DU VECTEUR ACCÉLÉRATION D'UN POINT D'UN SOLIDE

Pour faire, par la suite, simplement ce calcul, mettons en place la relation qui existe entre la dérivée d'un vecteur $\vec{U}(t)$ dans la base du repère R ($\vec{O}, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z}$) et la dérivée de ce même vecteur dans la base du repère R_1 ($\vec{O}_1, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1$). Autrement dit, cherchons la relation qui existe entre

$$\left[\frac{d\vec{U}(t)}{dt} \right]_R \quad \text{et} \quad \left[\frac{d\vec{U}(t)}{dt} \right]_{R_1}$$

Pour cela, exprimons $\vec{U}(t)$ dans la base du repère R_1 , posons

$$\vec{U}(t) = a(t)\vec{x}_1 + b(t)\vec{y}_1 + c(t)\vec{z}_1.$$

Avant d'établir cette relation dans le cas général, commençons par traiter le cas particulier où $\vec{z} = \vec{z}_1$. Ce cas particulier concerne tous les mouvements plans, mouvements que l'on rencontre très souvent dans les mécanismes simples (engrenages, bielle-manivelle, etc.) et également les mouvements tels que le mouvement hélicoïdal.

5.1. CAS PARTICULIER $\vec{z} = \vec{z}_1$

Dans ce cas l'orientation de la base de R_1 par rapport à la base de R est définie par un seul paramètre :

$$\alpha(t) = (\vec{x}, \vec{x}_1).$$

vecteur directement perpendiculaire à $\vec{x}_1$, c'est-à-dire déduit de $\vec{x}_1$ par rotation d'angle $+\frac{\pi}{2}$.

De la même façon :

$$\left[\frac{d\vec{y}_1}{d\alpha} \right]_R = \vec{z} \wedge \vec{y}_1.$$

Si bien que $\left[\frac{d\vec{U}(t)}{dt} \right]_R$, exprimé dans la relation (1), se met sous la forme :

$$\left[\frac{d\vec{U}(t)}{dt} \right]_R = \left[\frac{d\vec{U}(t)}{dt} \right]_{R_1} + a\alpha'(\vec{z} \wedge \vec{x}_1) + b\alpha'(\vec{z} \wedge \vec{y}_1)$$

ou encore, en remarquant que $\vec{z} \wedge \vec{z}_1 = \vec{0}$,

$$\left[\frac{d\vec{U}(t)}{dt} \right]_R = \left[\frac{d\vec{U}(t)}{dt} \right]_{R_1} + \alpha' \vec{z} \wedge (a\vec{x}_1 + b\vec{y}_1 + c\vec{z}_1),$$

ce qui fait apparaître $\vec{U}(t)$.

Posons

$$\vec{\Omega}(R_1/R) = \alpha' \vec{z}$$

alors :

$$\left[\frac{d\vec{U}(t)}{dt} \right]_R = \left[\frac{d\vec{U}(t)}{dt} \right]_{R_1} + \vec{\Omega}(R_1/R) \wedge \vec{U}(t) \quad (3)$$

Le vecteur $\vec{\Omega}(R_1/R)$ est un **vecteur libre** qui mesure la vitesse angulaire α' de changement d'orientation de la base de R_1 par rapport à la base de R , autour de $\vec{z}$ dans ce cas particulier.

Ce vecteur a pour direction $\vec{z}$ et sa mesure algébrique sur $\vec{z}$ est égale à la vitesse angulaire α' (figure 6).

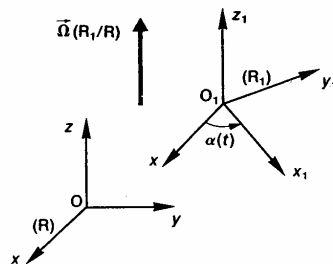


Fig. 6

Définition

$\vec{\Omega}(R_1/R)$ est appelé **vecteur rotation de la base de R_1 par rapport à la base de R** .

Unité

La norme du vecteur rotation s'exprime en radians par seconde (rad/s).

Application

Soit $R(O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ un repère lié à un bâti (S_0). Considère un solide (S) ayant avec (S_0) une liaison pivot d'axe (O) (figure 7).

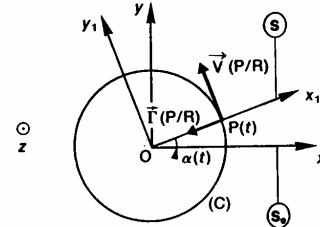


Fig.

Soit $R_1(O, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z})$ un repère lié à (S), posons

$$\alpha(t) = (\vec{x}, \vec{x}_1).$$

Supposons $\alpha(t)$ de la forme :

$$\alpha(t) = \omega t$$

(ω est une constante positive exprimée en radians seconde).

Soit $P(t)$ un point du solide (S) tel que :

$$\vec{OP}(t) = a\vec{x}_1$$

(a est une constante positive exprimée en mètres).

QUESTION 1

Déterminer le vecteur vitesse du point P par rapport au repère R : $\vec{V}(P/R)$.

RÉPONSE

Nous savons par définition que :

$$\vec{V}(P/R) = \left[\frac{d}{dt} \vec{OP}(t) \right]_R$$

sachant que $\vec{OP}(t) = a\vec{x}_1$ (a = constante positive)

$$\vec{V}(P/R) = a \left[\frac{d\vec{x}_1}{dt} \right]_R.$$

Pour calculer $\left[\frac{d\vec{x}_1}{dt} \right]_R$ appliquons la relation (3) choisissant la base de R_1 comme nouvelle base d'écriture :

$$\left[\frac{d\vec{x}_1}{dt} \right]_R = \left[\frac{d\vec{x}_1}{dt} \right]_{R_1} + \vec{\Omega}(R_1/R) \wedge \vec{x}_1$$

$$\left[\frac{d\vec{x}_1}{dt} \right]_{R_1} = \vec{0} \quad \text{car } \vec{x}_1 \text{ est constant dans } R_1.$$

$$\vec{\Omega}(R_1/R) = \alpha' \vec{z} = \omega \vec{z}.$$

Par suite :

$$\vec{V}(P/R) = a\omega (\vec{z} \wedge \vec{x}_1)$$

$$\vec{V}(P/R) = a\omega \vec{y}_1$$

$a\omega$ s'exprime en mètres par seconde.

$\vec{V}(P/R)$ est un vecteur parallèle à la direction tangente en P au cercle de centre O , de rayon a (figure 7).

QUESTION 2

Déterminer l'hodographe du vecteur vitesse $\vec{V}(P/R)$ relatif à un point A quelconque du repère R.

RÉPONSE

Remarquons que $\|\vec{V}(P/R)\| = a\omega = \text{constante}$. Par conséquent, l'hodographe relatif au point A quelconque de R est un cercle de centre A et de rayon $a\omega$ (figure 8).

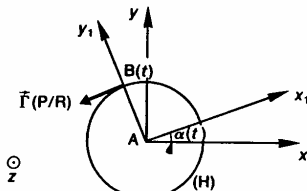


Fig. 8

QUESTION 3

Déterminer le vecteur accélération du point P par rapport au repère R : $\vec{\Gamma}(P/R)$.

RÉPONSE

Nous savons par définition que :

$$\vec{\Gamma}(P/R) = \left[\frac{d}{dt} \vec{V}(P/R) \right]_R$$

sachant que : $\vec{V}(P/R) = a\omega \vec{y}_1$

$$\vec{\Gamma}(P/R) = a\omega \left[\frac{d}{dt} \vec{y}_1 \right]_R$$

Pour calculer $\left[\frac{d}{dt} \vec{y}_1 \right]_R$ appliquons la relation (3) en choisissant la base de R_1 comme nouvelle base de dérivation :

$$\left[\frac{d\vec{y}_1}{dt} \right]_R = \left[\frac{d\vec{y}_1}{dt} \right]_{R_1} + \vec{\Omega}(R_1/R) \wedge \vec{y}_1$$

$\left[\frac{d\vec{y}_1}{dt} \right]_{R_1} = \vec{0}$ car $\vec{y}_1$ est constant dans R_1 . Par suite :

$$\left[\frac{d\vec{y}_1}{dt} \right]_R = \omega \vec{z} \wedge \vec{y}_1$$

$$\left[\frac{d\vec{y}_1}{dt} \right]_R = -\omega \vec{x}_1$$

Par conséquent, le vecteur accélération du point P par rapport au repère R est :

$$\vec{\Gamma}(P/R) = -a\omega^2 \vec{x}_1$$

$a\omega^2$ s'exprime en mètres par seconde carré (m/s^2).

$\vec{\Gamma}(P/R)$ est un vecteur de même direction que le rayon vecteur $\vec{OP}$, mais de sens contraire (figure 7).

REMARQUES

— On constate que le calcul de la dérivée de $\vec{x}_1$ ou de $\vec{y}_1$ dans R s'est transformé en calcul de produit vectoriel. Pour qu'il en soit toujours

ainsi, il faut choisir la nouvelle base de dérivation telle que le vecteur unitaire à dériver y soit constant.

— L'avantage d'un paramétrage convenable du mécanisme et de l'utilisation de cette formule de changement de base de dérivation est d'obtenir des résultats simples et facilement interprétables géométriquement.

***5.2. CAS GÉNÉRAL**

Dans ce cas, l'orientation de la base de R_1 par rapport à la base de R est définie par trois paramètres. Supposons que ces trois paramètres soient les trois angles d'Euler (chapitre 1, paragraphe 4.2.2), ce qui n'enlève rien à la généralité de l'étude. Le calcul de $\left[\frac{d}{dt} \vec{U}(t) \right]_R$ commence comme précédemment, voir relation (1) paragraphe 5.1., pour arriver à :

$$\left[\frac{d}{dt} \vec{U}(t) \right]_R = \left[\frac{d}{dt} \vec{U}(t) \right]_{R_1} + a \left[\frac{d\vec{x}_1}{dt} \right]_{R_1} + b \left[\frac{d\vec{y}_1}{dt} \right]_{R_1} + c \left[\frac{d\vec{z}_1}{dt} \right]_{R_1} \quad (4)$$

Calculons $\left[\frac{d\vec{x}_1}{dt} \right]_{R_1}$, on obtiendra $\left[\frac{d\vec{y}_1}{dt} \right]_{R_1}$ et $\left[\frac{d\vec{z}_1}{dt} \right]_{R_1}$ de la même façon, nous effectuerons seulement le moment venu, une permutation des vecteurs de la base de R_1 .

En considérant que $\vec{x}_1$ est fonction de t par l'intermédiaire des trois angles ψ , θ , φ , on peut écrire (dérivée totale d'une fonction vectorielle de trois variables) :

$$\left[\frac{d\vec{x}_1}{dt} \right]_{R_1} = \left[\frac{\partial \vec{x}_1}{\partial \psi} \right]_{R_1} \psi' + \left[\frac{\partial \vec{x}_1}{\partial \theta} \right]_{R_1} \theta' + \left[\frac{\partial \vec{x}_1}{\partial \varphi} \right]_{R_1} \varphi' \quad (5)$$

avec $\psi' = \frac{d\psi}{dt}$, $\theta' = \frac{d\theta}{dt}$, $\varphi' = \frac{d\varphi}{dt}$.

Calculons $\left[\frac{\partial \vec{x}_1}{\partial \psi} \right]_{R_1}$ (figures 9 et 10).

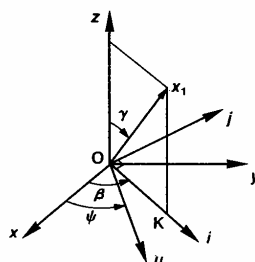


Fig. 9

Soit :

$\overline{OK}$ la projection de $(O, \vec{x}_1)$ sur le plan $(O, \vec{x}, \vec{y})$.

$\vec{i}$ un vecteur unitaire de direction OK .

$\vec{j} = \vec{z} \wedge \vec{i}$.

$\beta = (\vec{x}, \vec{i})$.

$\gamma = (\vec{z}, \vec{x}_1)$ angle orienté par $\vec{j}$.

$\vec{x}_1$ peut s'exprimer par $\vec{x}_1 = \sin \gamma \vec{i} + \cos \gamma \vec{z}$ et donc :

$$\left[\frac{\partial \vec{x}_1}{\partial \psi} \right]_R = \left[\frac{\partial}{\partial \psi} (\sin \gamma \vec{i} + \cos \gamma \vec{z}) \right]_R.$$

Remarquons que γ est indépendant de ψ ainsi que $\vec{z}$.
Par conséquent :

$$\left[\frac{\partial \vec{x}_1}{\partial \psi} \right]_R = \sin \gamma \left[\frac{\partial \vec{i}}{\partial \psi} \right]_R.$$

D'autre part, lorsqu'on calcule une dérivée partielle de fonction par rapport à une variable on suppose les autres variables constantes. Donc pour le calcul de la dérivée partielle de $\vec{x}_1$ par rapport à l'angle ψ on supposera les deux autres angles d'Euler θ et φ constants.

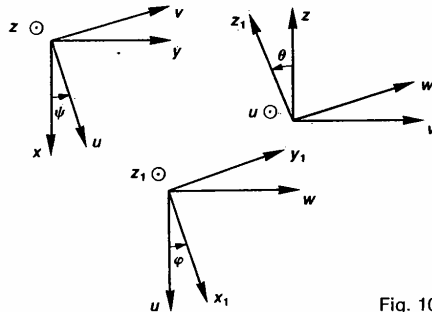


Fig. 10

Comme :

$$\vec{x}_1 = \cos \varphi \vec{u} + \sin \varphi \vec{w}$$

$$\vec{x}_1 = \cos \varphi \vec{u} + \sin \varphi (\cos \theta \vec{v} + \sin \theta \vec{z})$$

$$\vec{x}_1 = \cos \varphi \vec{u} + \sin \varphi \cos \theta \vec{v} + \sin \varphi \sin \theta \vec{z}.$$

On remarque que $\vec{x}_1$ est fixe dans la première base intermédiaire $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{z})$ si θ et φ sont constants.

Par suite, l'angle $(\vec{u}, \vec{i})$ est constant.

Donc $\beta = \psi + \text{constante}$

et $d\beta = d\psi$.

Alors

$$\left[\frac{\partial \vec{i}}{\partial \psi} \right]_R = \left[\frac{\partial \vec{i}}{\partial \beta} \right]_R.$$

D'après le résultat exprimé par la relation (2) paragraphe 5.1 :

$$\left[\frac{\partial \vec{i}}{\partial \beta} \right]_R = \vec{z} \wedge \vec{i}$$

soit

$$\left[\frac{\partial \vec{i}}{\partial \beta} \right]_R = \vec{j}.$$

Par suite :

$$\left[\frac{\partial \vec{x}_1}{\partial \psi} \right]_R = \sin \gamma \vec{j}.$$

En remarquant que : $\vec{z} \wedge \vec{x}_1 = \sin \gamma \vec{j}$, on obtient

$$\left[\frac{\partial \vec{x}_1}{\partial \psi} \right]_R = \vec{z} \wedge \vec{x}_1$$

ce qui veut dire que la dérivée partielle d'un vecteur unitaire par rapport à un angle du paramétrage R_1 par rapport à R est le produit vectoriel du vecteur unitaire autour duquel a lieu la rotation par vecteur unitaire que l'on dérive.

De la même façon (figure 10) :

$$\left[\frac{\partial \vec{x}_1}{\partial \theta} \right]_R = \vec{u} \wedge \vec{x}_1$$

$$\left[\frac{\partial \vec{x}_1}{\partial \varphi} \right]_R = \vec{z}_1 \wedge \vec{x}_1$$

avec ces résultats portés dans la relation (5) :

$$\begin{aligned} \left[\frac{d\vec{x}_1}{dt} \right]_R &= \psi' \vec{z} \wedge \vec{x}_1 + \theta' \vec{u} \wedge \vec{x}_1 + \varphi' \vec{z}_1 \wedge \vec{x}_1 \\ &= (\psi' \vec{z} + \theta' \vec{u} + \varphi' \vec{z}_1) \wedge \vec{x}_1 \end{aligned}$$

de même, par permutation des vecteurs de la base de R_1 :

$$\left[\frac{d\vec{y}_1}{dt} \right]_R = (\psi' \vec{z} + \theta' \vec{u} + \varphi' \vec{z}_1) \wedge \vec{y}_1$$

$$\left[\frac{d\vec{z}_1}{dt} \right]_R = (\psi' \vec{z} + \theta' \vec{u} + \varphi' \vec{z}_1) \wedge \vec{z}_1$$

si bien que $\left[\frac{d}{dt} \vec{U}(t) \right]_R$ exprimé dans la relation s'écrit, en se souvenant que

$$\vec{U}(t) = a(t) \vec{x}_1 + b(t) \vec{y}_1 + c(t) \vec{z}_1,$$

$$\left[\frac{d}{dt} \vec{U}(t) \right]_R = \left[\frac{d}{dt} \vec{U}(t) \right]_{R_1} + (\psi' \vec{z} + \theta' \vec{u} + \varphi' \vec{z}_1) \wedge \vec{U}$$

posons :

$$\vec{\Omega}(R_1/R) = \psi' \vec{z} + \theta' \vec{u} + \varphi' \vec{z}_1.$$

Comme précédemment $\vec{\Omega}(R_1/R)$ est appelé **vect rotation** de la base de R_1 par rapport à la base R , d'où :

$$\left[\frac{d}{dt} \vec{U}(t) \right]_R = \left[\frac{d}{dt} \vec{U}(t) \right]_{R_1} + \vec{\Omega}(R_1/R) \wedge \vec{U}(t) \quad (6)$$

Cette relation est identique à la relation (3) paragraphe 5.1, mais le vecteur rotation $\vec{\Omega}(R_1/R)$ est défini pour un mouvement dans l'espace 3 dimensions de la base de R_1 par rapport à la base R .

Application

Considérons une centrifugeuse de laboratoire composée d'un bâti (S_0), d'un bras (S_1) et d'une éprouvette contenant deux liquides de masses volumiques différentes.

Sous l'effet centrifuge due à la rotation du bras (S_1) l'éprouvette (S_2) s'incline pour se mettre pratiquement dans l'axe du bras et le liquide dont la masse volumique est la plus grande est rejeté vers le fond de l'éprouvette, ce qui réalise la séparation des deux liquides (figure 11).

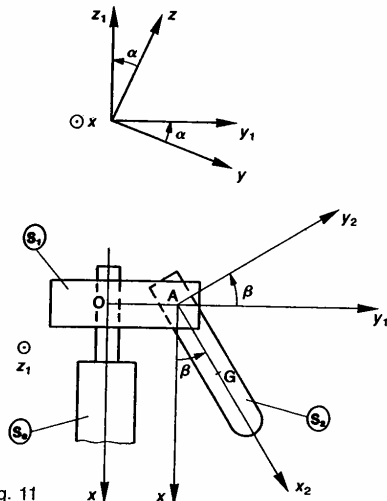


Fig. 11

Soit $R(O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ un repère lié à (S_0).
Les solides (S_0) et (S_1) ont une liaison pivot d'axe ($O, \vec{x}$).
 $R_1(O, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$ est un repère lié à (S_1). Posons $\alpha = (\vec{y}, \vec{y}_1)$ avec $\alpha = \omega t$ (ω constante positive exprimée en radians par seconde).
Les solides (S_1) et (S_2) ont une liaison pivot d'axe ($A, \vec{z}_1$) telle que :
 $\vec{OA} = a\vec{y}_1$ (a constante positive exprimée en mètres).
 $R_2(A, \vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_2)$ est un repère lié à (S_2). Posons $\beta = (\vec{x}, \vec{x}_2)$.
 β étant une fonction du temps inconnue.
Soit G le centre d'inertie de (S_2) tel que :
 $\vec{AG} = b\vec{x}_2$ (b constante positive exprimée en mètres).

QUESTION 1

Déterminer le vecteur rotation de la base du repère R_1 , lié au solide (S_1), par rapport à la base du repère R :

$$\vec{\Omega}(S_1/R) = \vec{\Omega}(R_1/R).$$

RÉPONSE

La base de R_1 est orientée par rapport à la base de R par l'angle α mesuré autour de $\vec{x}$, d'où

$$\vec{\Omega}(S_1/R) = \alpha' \vec{x}$$

soit :

$$\vec{\Omega}(S_1/R) = \omega \vec{x}.$$

QUESTION 2

Déterminer le vecteur rotation de la base du repère R_2 , lié au solide (S_2), par rapport à la base du repère R :

$$\vec{\Omega}(S_2/R) = \vec{\Omega}(R_2/R).$$

RÉPONSE

La base de R_2 est orientée par rapport à la base de R par l'angle α mesuré autour de $\vec{x}$ et par l'angle β mesuré autour de $\vec{z}_1$, d'où :

$$\vec{\Omega}(S_2/R) = \alpha' \vec{x} + \beta' \vec{z}_1$$

soit :

$$\vec{\Omega}(S_2/R) = \omega \vec{x} + \beta' \vec{z}_1.$$

QUESTION 3

Déterminer le vecteur vitesse du point G par rapport au repère R : $\vec{V}(G/R)$.

RÉPONSE

Par définition : $\vec{V}(G/R) = \left[\frac{d}{dt} \vec{OG} \right]_R$

avec

$$\vec{OG} = \vec{OA} + \vec{AG}$$

$$\vec{V}(G/R) = \left[\frac{d}{dt} \vec{OA} \right]_R + \left[\frac{d}{dt} \vec{AG} \right]_R. \quad (7)$$

Calculons successivement chaque terme :

$$\left[\frac{d}{dt} \vec{OA} \right]_R = \left[\frac{d}{dt} a\vec{y}_1 \right]_R = a \left[\frac{d}{dt} \vec{y}_1 \right]_R.$$

Pour calculer la dérivée de $\vec{y}_1$ dans la base de R passons par l'intermédiaire de la base de R_1 liée à $\vec{y}_1$. La relation (3) du paragraphe 5.1 permet d'écrire :

$$\left[\frac{d\vec{y}_1}{dt} \right]_R = \left[\frac{d\vec{y}_1}{dt} \right]_{R_1} + \vec{\Omega}(R_1/R) \wedge \vec{y}_1.$$

$\vec{y}_1$ étant un des vecteurs de la base de R_1 :

$$\left[\frac{d\vec{y}_1}{dt} \right]_{R_1} = \vec{0}.$$

Par suite :

$$\left[\frac{d\vec{y}_1}{dt} \right]_R = \omega \vec{x} \wedge \vec{y}_1$$

soit

$$\left[\frac{d\vec{y}_1}{dt} \right]_R = \omega \vec{z}_1$$

et

$$\left[\frac{d}{dt} \vec{OA} \right]_R = a\omega \vec{z}_1. \quad (8)$$

Calculons le deuxième terme de la relation (7) :

$$\left[\frac{d}{dt} \vec{AG} \right]_R = \left[\frac{d}{dt} b\vec{x}_2 \right]_R = b \left[\frac{d}{dt} \vec{x}_2 \right]_R.$$

Pour calculer la dérivée de $\vec{x}_2$ dans la base de R passons par l'intermédiaire de la base de R_2 liée à $\vec{x}_2$. La relation (6) du paragraphe 5.2 permet d'écrire :

$$\left[\frac{d\vec{x}_2}{dt} \right]_R = \left[\frac{d\vec{x}_2}{dt} \right]_{R_2} + \vec{\Omega}(R_2/R) \wedge \vec{x}_2.$$

$\vec{x}_2$ étant un des vecteurs de la base de R_2 :

$$\left[\frac{d\vec{x}_2}{dt} \right]_{R_2} = \vec{0}.$$

Par suite :

$$\left[\frac{d\vec{x}_2}{dt} \right]_R = (\omega \vec{x} + \beta' \vec{z}_1) \wedge \vec{x}_2 = \omega \sin \beta \vec{z}_1 + \beta' \vec{y}_2$$

et

$$\left[\frac{d}{dt} \vec{AG} \right]_R = b (\omega \sin \beta \vec{z}_1 + \beta' \vec{y}_2). \quad (9)$$

Avec les relations (8) et (9) on obtient l'expression de $\vec{V}(G/R)$ suivante :

$$\vec{V}(G/R) = \omega(a + b \sin \beta) \vec{z}_1 + b\beta' \vec{y}_2.$$

QUESTION 4

Déterminer le vecteur accélération du point G par rapport au repère R : $\vec{\Gamma}(G/R)$.

RÉPONSE

Par définition :

$$\vec{\Gamma}(G/R) = \left[\frac{d}{dt} \vec{V}(G/R) \right]_R$$

Avec $\vec{V}(G/R) = \omega(a + b \sin \beta) \vec{z}_1 + b\beta' \vec{y}_2$,

$$\vec{\Gamma}(G/R) = \left[\frac{d}{dt} \omega(a + b \sin \beta) \vec{z}_1 \right]_R + \left[\frac{d}{dt} b\beta' \vec{y}_2 \right]_R \quad (10)$$

Le premier terme s'écrit :

$$\left[\frac{d}{dt} \omega(a + b \sin \beta) \vec{z}_1 \right]_R = \omega b \beta' \cos \beta \vec{z}_1 + \omega(a + b \sin \beta) \left[\frac{d\vec{z}_1}{dt} \right]_R$$

Pour calculer la dérivée de $\vec{z}_1$ dans la base de R passons par l'intermédiaire de la base de R_1 liée à $\vec{z}_1$. La relation (3) du paragraphe 5.1 permet d'écrire :

$$\left[\frac{d\vec{z}_1}{dt} \right]_R = \left[\frac{d\vec{z}_1}{dt} \right]_{R_1} + \vec{\Omega}(R_1/R) \wedge \vec{z}_1$$

$$\left[\frac{d\vec{z}_1}{dt} \right]_{R_1} = \vec{0}, \text{ car } \vec{z}_1 \text{ est constant dans } R_1.$$

Par suite :

$$\left[\frac{d\vec{z}_1}{dt} \right]_R = \omega \vec{x} \wedge \vec{z}_1$$

soit

$$\left[\frac{d\vec{z}_1}{dt} \right]_R = -\omega \vec{y}_1.$$

Alors :

$$\left[\frac{d}{dt} \omega(a + b \sin \beta) \vec{z}_1 \right]_R = \omega b \beta' \cos \beta \vec{z}_1 - \omega^2(a + b \sin \beta) \vec{y}_1. \quad (11)$$

Le deuxième terme de (10) s'écrit :

$$\left[\frac{d}{dt} b\beta' \vec{y}_2 \right]_R = b\beta'' \vec{y}_2 + b\beta' \left[\frac{d\vec{y}_2}{dt} \right]_R$$

Pour calculer la dérivée de $\vec{y}_2$ dans la base de R passons par l'intermédiaire de la base de R_2 liée à $\vec{y}_2$. La relation (6) du paragraphe 5.2 permet d'écrire :

$$\left[\frac{d\vec{y}_2}{dt} \right]_R = \left[\frac{d\vec{y}_2}{dt} \right]_{R_2} + \vec{\Omega}(R_2/R) \wedge \vec{y}_2$$

$$\left[\frac{d\vec{y}_2}{dt} \right]_{R_2} = \vec{0} \text{ car } \vec{y}_2 \text{ est constant dans } R_2.$$

Par suite :

$$\left[\frac{d\vec{y}_2}{dt} \right]_R = (\omega \vec{x} + \beta' \vec{z}_1) \wedge \vec{y}_2$$

soit

$$\left[\frac{d\vec{y}_2}{dt} \right]_R = \omega \cos \beta \vec{z}_1 - \beta' \vec{x}_2.$$

Alors :

$$\left[\frac{d}{dt} b\beta' \vec{y}_2 \right]_R = b\beta'' \vec{y}_2 + \omega b \beta' \cos \beta \vec{z}_1 - b\beta'^2 \vec{x}_2. \quad (12)$$

En rassemblant les résultats obtenus en (11) et (12), le vecteur accélération du point G par rapport au repère R s'écrit :

$$\vec{\Gamma}(G/R) = 2\omega b \beta' \cos \beta \vec{z}_1 - \omega^2(a + b \sin \beta) \vec{y}_1 + b\beta'' \vec{y}_2 - b\beta'^2 \vec{x}_2.$$

6. DÉRIVATION GRAPHIQUE

La méthode de dérivation graphique d'une fonction $x(t)$ dont on connaît la courbe représentative sur un intervalle $[t_1, t_2]$ est une méthode géométrique simple fondée sur l'interprétation géométrique de la dérivée $\frac{dx(t)}{dt}$ de la fonction $x(t)$, dont voici

principe :

Soit la courbe représentative de la fonction $x(t)$ supposée continue sur l'intervalle $[t_1, t_2]$ (figure 12).

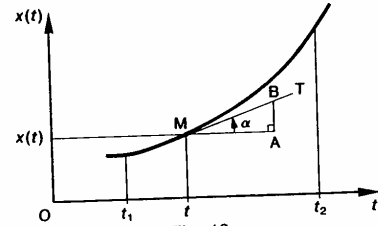


Fig. 12

Soit MT la tangente à la courbe en un point d'abscisse $t \in [t_1, t_2]$.

Soit α l'angle de cette tangente avec l'axe abscisses $\left(-\frac{\pi}{2} \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}\right)$.

Nous savons que la pente de la courbe au point c'est-à-dire $\tan \alpha$, est égale à la dérivée de la fonction $x(t)$ en ce point, soit

$$\frac{dx(t)}{dt} = \tan \alpha.$$

Considérons le triangle rectangle MAB tel que soit parallèle à l'axe des abscisses, AB soit parallèle à l'axe des ordonnées et que l'hypoténuse MB soit sur la tangente MT.

Alors $\tan \alpha = \frac{AB}{MA}$ et par suite :

$$\frac{dx(t)}{dt} = \frac{AB}{MA}$$

Donc, après avoir tracé au point M la tangente à la courbe $x(t)$, la valeur de la dérivée $\frac{dx(t)}{dt}$ au point s'obtient par le calcul du rapport des côtés AB et MA mesurés algébriquement sur les axes avec les unités convenables.

Application

Le schéma cinématique de la figure 13 modélise un système bielle-manivelle.

Soit $R(O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ un repère lié au bâti (0). La manivelle a une liaison pivot d'axe $(O, \vec{z})$ avec le bâti (0).

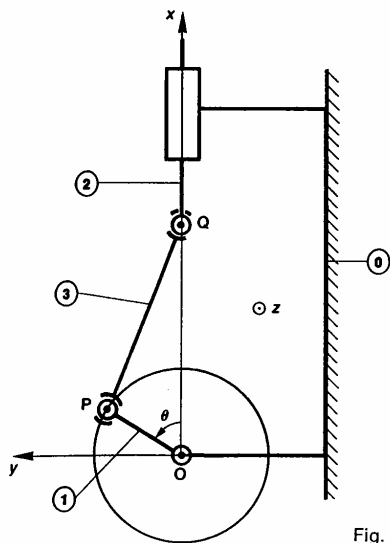


Fig. 13

coulisseau (2) a une liaison pivot glissant d'axe (O, $\vec{x}$) avec le bâti (0).

La bielle (3) a une liaison rotule avec (1) et (2) de centres P et Q respectivement, situés dans le plan (O, $\vec{x}$, $\vec{y}$). Le point Q décrit l'axe (O, $\vec{x}$).

On pose $\theta = (\vec{x}, \vec{OP})$ avec

$$\begin{cases} \theta = \omega t & (\omega = 452,4 \text{ rad/s}) \\ r = OP & (r = 30 \text{ mm}) \\ l = PQ & (l = 70 \text{ mm}). \end{cases}$$

Définissons la position du point Q du coulisseau (2) par rapport au bâti (0) par la variable $x(t) = \vec{OQ}$. Comme $\theta = \omega t$, $x(t)$ peut-être également considérée comme une fonction de θ : $x(\theta)$.

QUESTION 1

Déterminer graphiquement la courbe représentative de la position du coulisseau par rapport au bâti en fonction de la position angulaire de la manivelle :

$$x(\theta) \text{ pour } \theta \in [0, 2\pi].$$

RÉPONSE

Pour cela placer le repère (x, θ) par rapport au système bielle-manivelle comme indiqué sur la figure 14a.

Choix des échelles :

— en abscisse : $\frac{\pi}{6}$ rad est représenté par 7,5 mm;

— en ordonnée : le système bielle-manivelle étant dessiné à l'échelle $\frac{1}{2}$, 1 mm de la course du coulisseau est

représenté par 0,5 mm (x varie entre 40 et 100 mm).

Les points de mesure choisis correspondent aux valeurs de θ variant de 0 à 2π avec un pas de $\frac{\pi}{6}$ rad.

Les différentes positions du point Q s'obtiennent en portant avec un compas une distance de 35 mm à partir des positions du point P correspondant aux différentes valeurs de θ (le point M correspondant à la valeur $\theta = \frac{\pi}{6}$ a été dessiné sur la figure 14a).

La courbe $x(\theta)$ est symétrique par rapport à la droite $\theta = \pi$.

QUESTION 2

En déduire par dérivation graphique la courbe représentative de la vitesse du coulisseau par rapport au bâti en fonction de la position angulaire de la manivelle :

$$x'_t(\theta) = \frac{dx(\theta)}{dt} \text{ pour } \theta \in [0, 2\pi].$$

RÉPONSE

Avec $\theta = \omega t$, $x'_t(\theta) = \frac{dx(\theta)}{dt}$ s'écrit :

$$x'_t(\theta) = \omega \frac{dx(\theta)}{d\theta}.$$

Choix de l'échelle sur l'axe des ordonnées : une vitesse de 1 m/s est représentée par 2,5 mm. Pour obtenir, par exemple, au point d'abscisse $\theta = \frac{\pi}{6}$ la valeur de x'_t , tracer le triangle rectangle MAB défini au paragraphe 6, tel que $\overline{MA} = \frac{\pi}{3}$ pour avoir une précision suffisante (figure 14a).

Alors $\overline{AB} = -22$ mm

$$\text{et} \quad x'_t = 452,4 \times \frac{-0,022}{\frac{\pi}{3}},$$

$$x'_t = -9,5 \text{ m/s}.$$

La courbe $x'_t(\theta)$ est symétrique par rapport au point $\theta = \pi$.

QUESTION 3

En déduire par dérivation graphique la courbe représentative de l'accélération du coulisseau par rapport au bâti en fonction de la position angulaire de la manivelle :

$$x''_t(\theta) = \frac{dx'_t(\theta)}{dt} \text{ pour } \theta \in [0, 2\pi].$$

RÉPONSE

Avec $\theta = \omega t$, $x''_t(\theta) = \frac{dx'_t(\theta)}{dt}$ s'écrit :

$$x''_t(\theta) = \omega \frac{dx'_t(\theta)}{d\theta}.$$

Choix de l'échelle sur l'axe des ordonnées : une accélération de 10^3 m/s^2 est représentée par 5 mm. Pour obtenir, par exemple, au point d'abscisse $\theta = \frac{\pi}{6}$ la valeur de x''_t

tracer le triangle rectangle M'A'B' tel que $\overline{M'A'} = \frac{\pi}{3}$ (figure 14b).

$$\text{Alors } \overline{A'B'} = -10,8 \text{ m/s et } x''_t = 452,4 \times \frac{-10,8}{\frac{\pi}{3}},$$

$$x''_t = -4668 \text{ m/s}^2.$$

La courbe $x''_t(\theta)$ est symétrique par rapport à la droite $\theta = \pi$ (figure 14c).

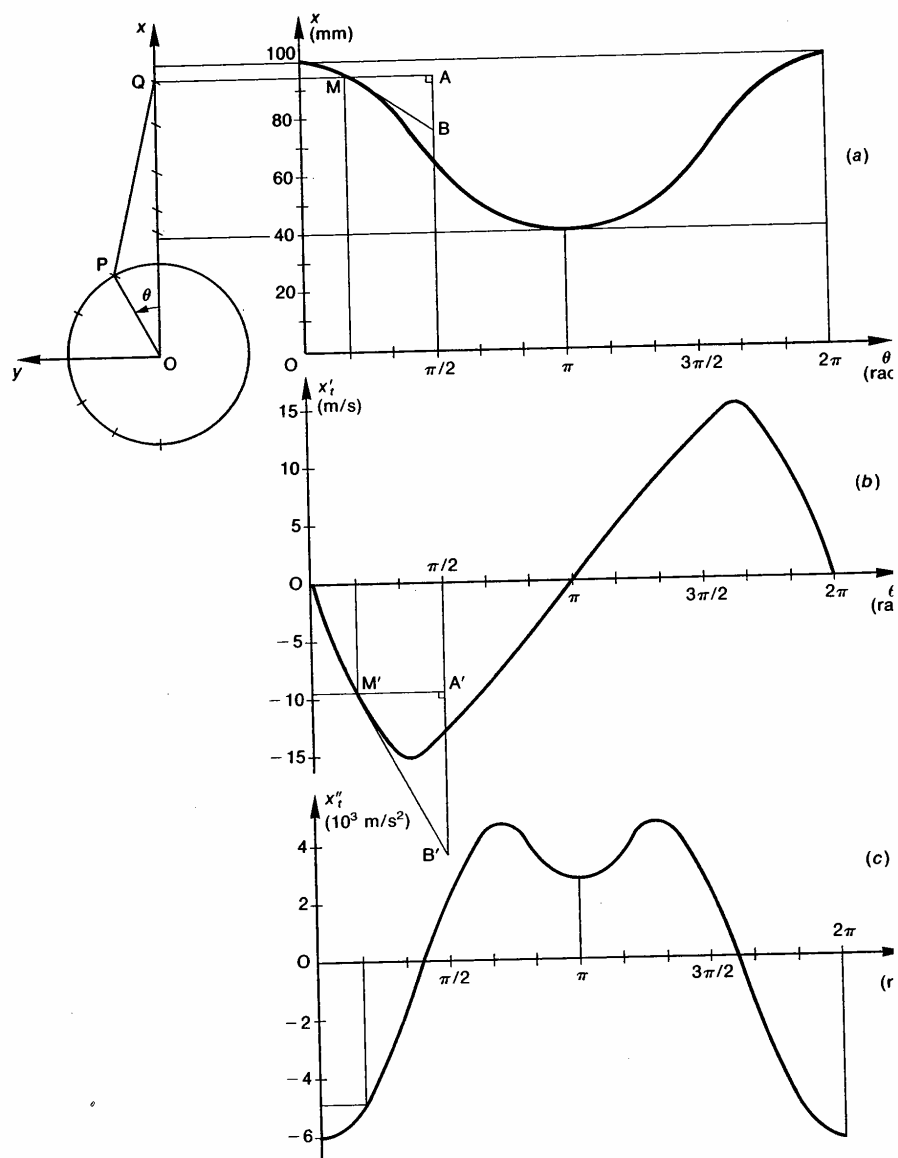


Fig. 14

A SAVOIR

1. Dans un repère $R(O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ le vecteur position d'un point P dans R à la date t est $\vec{OP}$. Le vecteur vitesse du point P par rapport à R à la date t est :

$$\vec{V}(P/R) = \left[\frac{d}{dt} \vec{OP} \right]_R$$

Le vecteur accélération du point P par rapport à R à la date t est :

$$\vec{\Gamma}(P/R) = \left[\frac{d}{dt} \vec{V}(P/R) \right]_R$$

2. A connaître aussi la relation de changement de base de dérivation :

$$\left[\frac{d\vec{U}(t)}{dt} \right]_R = \left[\frac{d\vec{U}(t)}{dt} \right]_{R_1} + \vec{\Omega}(R_1/R) \wedge \vec{U}(t)$$

* Quand l'orientation de la base de R_1 par rapport à la base de R est définie par les trois angles d'Euler :

$$\vec{\Omega}(R_1/R) = \dot{\varphi} \vec{z} + \dot{\theta} \vec{x} + \dot{\psi} \vec{z}_{111} \quad \text{avec}$$

PROBLÈME RÉSOLU

Étude du mouvement d'un point M de l'arête coupante d'un outil de fraise par rapport à une pièce bridée sur la table de la fraiseuse, la table étant animé d'un mouvement transversal (figure 15).

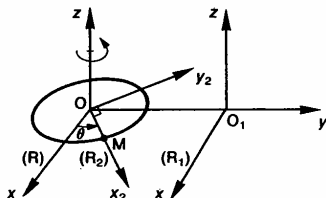


Fig. 15

Le repère $R(O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ est lié au bâti et le repère $R_1(O_1, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$ est lié à la pièce.

L'origine O_1 a un mouvement de translation rectiligne uniforme d'axe $(O, \vec{y})$ par rapport au repère R . On pose :

$$\vec{OO}_1 = at \vec{y}, \text{ avec } a = 2 \text{ mm/tr}$$

(mouvement d'avance de la pièce).

Soit $R_2(O, \vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_2)$ un repère lié à la fraise. On pose :

$$\theta = (\vec{x}, \vec{x}_2), \text{ avec } \theta = \omega t \text{ et } \omega = 21 \text{ rad/s}$$

(mouvement de coupe de la fraise).

Le point M de l'arête coupante de la fraise est tel que :

$$\vec{OM} = r \vec{x}_2, \text{ avec } r = 50 \text{ mm.}$$

QUESTION 1

Déterminer les deux composantes du vecteur position $\vec{O_1M}$ du point M dans le repère R_1 , en fonction du temps t : $x_1(t)$, $y_1(t)$.

Tracer approximativement la trajectoire du point M dans le repère R_1 , pour $t \geq 0$.

RÉPONSE

Le vecteur position $\vec{O_1M}$ s'écrit :

$$\vec{O_1M} = \vec{O_1O} + \vec{OM} = -at \vec{y} + r \vec{x}_2$$

avec $\vec{x}_2 = \cos \theta \vec{x} + \sin \theta \vec{y}$ et $\theta = \omega t$,

$$\vec{O_1M} = r \cos \omega t \vec{x} + (-at + r \sin \omega t) \vec{y}.$$

Les deux composantes de $\vec{O_1M}$, sur les axes $(O_1, \vec{x})$ et $(O_1, \vec{y})$, donnent l'équation paramétrique de la trajectoire de M par R_1 :

$$\begin{cases} x_1(t) = r \cos \omega t \\ y_1(t) = -at + r \sin \omega t. \end{cases}$$

Cette trajectoire a l'allure suivante (figure 16) :

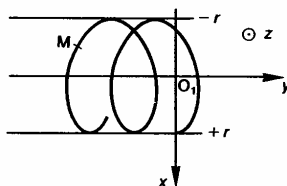


Fig. 16

QUESTION 2

Calculer le vecteur vitesse du point M par rapport au repère R_1 : $\vec{V}(M/R_1)$.

RÉPONSE

Le vecteur vitesse du point M par rapport au repère R_1 est la dérivée du vecteur position $\vec{O_1M}$ par rapport à t , dans R_1 :

$$\vec{V}(M/R_1) = \left[\frac{d}{dt} \vec{O_1M} \right]_{R_1}$$

avec $\vec{O_1M} = -at\vec{y} + r\vec{x}_2$,

$$\vec{V}(M/R_1) = \left[\frac{d}{dt} (-at\vec{y}) \right]_{R_1} + \left[\frac{d}{dt} r\vec{x}_2 \right]_{R_1}. \quad (13)$$

Calculons successivement chaque terme :

$$\left[\frac{d}{dt} (-at\vec{y}) \right]_{R_1} = -a\vec{y}$$

$\vec{y}$ étant fixe dans R_1 .

Pour calculer la dérivée de $r\vec{x}_2$ dans R_1 utilisons la base intermédiaire du repère R_2 dont $\vec{x}_2$ est un vecteur unitaire :

$$\left[\frac{d}{dt} r\vec{x}_2 \right]_{R_1} = \left[\frac{d}{dt} r\vec{x}_2 \right]_{R_2} + \vec{\Omega}(R_2/R_1) \wedge r\vec{x}_2.$$

Le vecteur $r\vec{x}_2$ étant constant dans la base de R_2 :

$$\left[\frac{d}{dt} r\vec{x}_2 \right]_{R_2} = \vec{0}.$$

L'orientation de la base de R_2 par rapport à la base de R étant définie par l'angle θ ($\theta = \omega t$) mesuré autour de $\vec{z}$:

$$\vec{\Omega}(R_2/R_1) = \omega\vec{z}.$$

Alors :

$$\left[\frac{d}{dt} r\vec{x}_2 \right]_{R_1} = \omega\vec{z} \wedge r\vec{x}_2 = \omega r\vec{y}_2.$$

Par suite, l'expression de $\vec{V}(M/R_1)$ écrite en (13) devient :

$$\vec{V}(M/R_1) = -a\vec{y} + \omega r\vec{y}_2.$$

QUESTION 3

Déterminer l'hodographe de $\vec{V}(M/R_1)$ relatif au point O_1 . En déduire la variation maximale de $\|\vec{V}(M/R_1)\|$ en mètres par minute.

RÉPONSE

Dans le repère R_1 plaçons le point B tel que (figure 17) :

$$\vec{O_1B} = \vec{V}(M/R_1) = -a\vec{y} + \omega r\vec{y}_2.$$

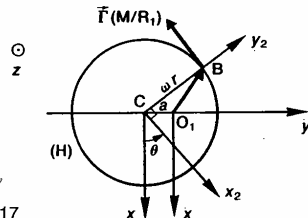


Fig. 17

Posons $\vec{O_1C} = -a\vec{y}$ et $\vec{CB} = \omega r\vec{y}_2$.

Le vecteur $\vec{O_1C}$ est constant dans R_1 , par conséquent le point C est un point fixe de l'axe $(O_1, \vec{y})$.

Le vecteur $\vec{CB}$ a une norme constante égale à ωr , par conséquent le point B reste à une distance constante du point C au cours du mouvement. Par suite, l'hodographe (H) est le cercle de centre C de rayon ωr .

Avec les valeurs numériques proposées $\omega r > a$. Alors le point O_1 se trouve à l'intérieur de l'hodographe.

$\|\vec{O_1B}\|$ est minimal pour $\theta = 0$ (à $2k\pi$), donc

$$\|\vec{V}(M/R_1)\|_{\min} = \omega r - a;$$

$\|\vec{O_1B}\|$ est maximal pour $\theta = \pi$ (à $2k\pi$), donc

$$\|\vec{V}(M/R_1)\|_{\max} = \omega r + a.$$

Par suite, la variation maximale de $\|\vec{V}(M/R_1)\|$ est égale à $2a$, soit 0,8 m/min.

QUESTION 4

Déterminer le vecteur accélération du point M par rapport au repère R_1 : $\vec{\Gamma}(M/R_1)$.

RÉPONSE

Le vecteur accélération du point M par rapport au repère R_1 est la dérivée du vecteur vitesse $\vec{V}(M/R_1)$ par rapport à t dans R_1 :

$$\vec{\Gamma}(M/R_1) = \left[\frac{d}{dt} \vec{V}(M/R_1) \right]_{R_1}$$

avec $\vec{V}(M/R_1) = -a\vec{y} + \omega r\vec{y}_2$

$$\vec{\Gamma}(M/R_1) = \left[\frac{d}{dt} (-a\vec{y}) \right]_{R_1} + \left[\frac{d}{dt} \omega r\vec{y}_2 \right]_{R_1}.$$

Le vecteur $-a\vec{y}$ est constant dans R_1 , donc :

$$\left[\frac{d}{dt} (-a\vec{y}) \right]_{R_1} = \vec{0}.$$

Alors $\vec{\Gamma}(M/R_1) = \omega r \left[\frac{d}{dt} \vec{y}_2 \right]_{R_1}$.

Pour calculer la dérivée de $\vec{y}_2$ dans la base de R_1 utilisons la base de R_2 dans laquelle $\vec{y}_2$ est constant :

$$\left[\frac{d}{dt} \vec{y}_2 \right]_{R_1} = \left[\frac{d}{dt} \vec{y}_2 \right]_{R_2} + \vec{\Omega}(R_2/R_1) \wedge \vec{y}_2$$

sachant que

$$\left[\frac{d}{dt} \vec{y}_2 \right]_{R_2} = \vec{0} \quad \text{et} \quad \vec{\Omega}(R_2/R_1) = \omega\vec{z}.$$

Le vecteur accélération s'écrit :

$$\vec{\Gamma}(M/R_1) = \omega r (\omega\vec{z} \wedge \vec{y}_2)$$

soit

$$\vec{\Gamma}(M/R_1) = -\omega^2 r\vec{x}_2.$$

Ce vecteur est bien tangent au point B à l'hodographe (H) (figure 17).

$\vec{\Gamma}(M/R_1)$ est un vecteur de même direction que le rayon vecteur $\vec{OM}$, mais de sens contraire.

CONSEILS POUR LA RÉOLUTION

Avant toute étude cinématique d'un problème, on doit bien paramétrer le mécanisme en choisissant, en particulier, toutes les bases intermédiaires.

Pour les calculs de dérivées de vecteurs, utiliser la relation de changement de base de déviation, on obtiendra des résultats simples et facilement vérifiables géométriquement.

3. Les vecteurs position, vitesse et accélération s'expriment à partir de différents vecteurs unitaires des bases intermédiaires. Il est inutile, pour l'instant, de projeter tous ces vecteurs sur une base particulière.

4. Pour tracer la courbe des vitesses ou des accélérations par dérivation graphique, définir avec soin les échelles utilisées.

EXERCICES AVEC RÉPONSES

1 — Soit un repère $R(O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$. Un point P décrit une hélice circulaire d'axe $(O, \vec{z})$ de rayon r (figure 18).

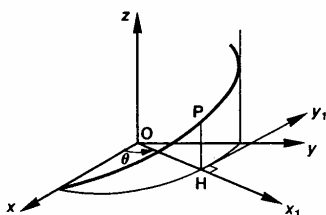


Fig. 18

Soit H la projection orthogonale du point P sur le plan $(O, \vec{x}, \vec{y})$.

Soit $R_1(O, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z})$ le repère tel que $\vec{x}_1$ ait même direction et même sens que $\vec{OH}$.

On pose : $\theta = (\vec{z}, \vec{x}_1)$ et

$$\vec{HP} = z = k\theta \quad (k \text{ constante positive}).$$

QUESTIONS

1° Calculer $\vec{V}(P/R)$ et $\vec{\Gamma}(P/R)$.

2° Lorsque $\theta = \omega t$ (ω constante positive), montrer que la norme du vecteur vitesse est constante et que le vecteur accélération a pour direction $\vec{x}_1$.

RÉPONSES

$$1^\circ \vec{V}(P/R) = r\theta' \vec{y}_1 + k\theta' \vec{z}$$

$$\vec{\Gamma}(P/R) = r\theta'' \vec{y}_1 - r\theta'^2 \vec{x}_1 + k\theta'' \vec{z}.$$

$$2^\circ \theta = \omega t, \theta' = \omega, \theta'' = 0$$

$$\|\vec{V}(P/R)\| = \omega \sqrt{r^2 + k^2}$$

$$\vec{\Gamma}(P/R) = -r\omega^2 \vec{x}_1.$$

2 — On considère le problème plan suivant :

Soit (S) un disque de centre C , de rayon a , situé dans le plan $(O, \vec{x}, \vec{y})$ d'un repère $R(O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ et en contact en un point I de sa circonférence avec l'axe $(O, \vec{x})$.

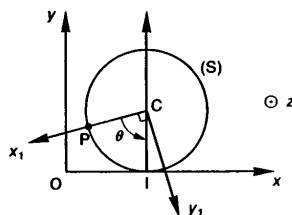


Fig. 19

Soit $R_1(C, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z})$ un repère lié au disque.

On pose : $\theta = (\vec{x}_1, -\vec{y})$

avec $\theta = \omega t$ (ω constante positive).

Soit un point P du disque tel que

$$\vec{CP} = a\vec{x}_1.$$

Ce disque roule sans glisser sur l'axe $(O, \vec{x})$, c'est-à-dire qu'à chaque instant $\vec{OI} = \vec{PI}$.

QUESTIONS

1° Déterminer l'équation paramétrique de la trajectoire du point P dans le repère R . La tracer pour $\theta \in [0, 2\pi]$.

2° Déterminer $\vec{\Omega}(S/R)$.

3° Calculer $\vec{V}(P/R)$.

4° Déterminer l'hodographe de $\vec{V}(P/R)$ relatif au point O .

Pour quelles valeurs de θ la norme de $\vec{V}(P/R)$ est-elle minimale; est-elle maximale?

5° Calculer $\vec{\Gamma}(P/R)$.

RÉPONSES

$$1^\circ \begin{cases} x = a(\theta - \sin \theta) \\ y = a(1 - \cos \theta) \end{cases}$$

La trajectoire est une cycloïde dont l'allure est donnée figure 20 pour $\theta \in [0, 2\pi]$.

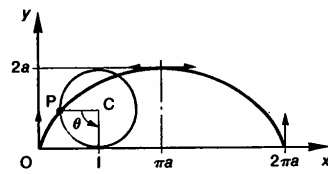


Fig. 20

$$2^\circ \vec{\Omega}(S/R) = -\omega \vec{z}.$$

$$3^\circ \vec{V}(P/R) = a\omega (\vec{x} - \vec{y}_1).$$

4° L'hodographe est le cercle de centre C ($a\omega$, 0) de rayon $a\omega$ (figure 21).

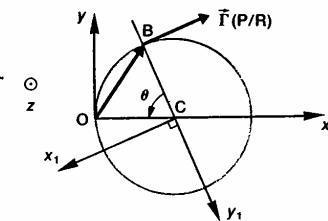


Fig. 21

$$\begin{aligned} \|\vec{V}(P/R)\|_{\max} &= 2a\omega \quad \text{pour } \theta = (2k+1)\pi \\ \|\vec{V}(P/R)\|_{\min} &= 0 \quad \text{pour } \theta = 2k\pi. \end{aligned}$$

$$5^\circ \vec{\Gamma}(P/R) = -a\omega^2 \vec{x}_1.$$

3 — La figure 22 représente une tronçonneuse destinée à couper un tube fabriqué en continu. La scie (2) doit se déplacer à la même vitesse de translation que le tube (3).

Le mouvement est obtenu à l'aide d'un système bielle-manivelle. Le plateau (5) muni d'une rainure est entraîné à une vitesse de rotation uniforme par le moto-variateur (4). Le plateau (7) tourne librement autour d'un axe, parallèle à celui du plateau (5) mais décalé d'une distance Δ .

Le doigt (6) relie les deux plateaux; une extrémité est fixée à (7), l'autre coulisse dans la rainure de (5). La bielle (8) entraîne à partir du doigt (6) le coulisseau (9) sur lequel est monté l'ensemble moteur (1)-scie (2).

— L'entraxe entre (5) et (7) est $\vec{O'O} = \Delta \vec{y}$ avec $\Delta = 30 \text{ mm}$.

— L'axe (6) est fixé sur (7) à une distance $O'M = R = 90 \text{ mm}$.

— La longueur de la bielle (8) est $MC = l = 900 \text{ mm}$.

La figure 23 représente le schéma cinématique du mécanisme.

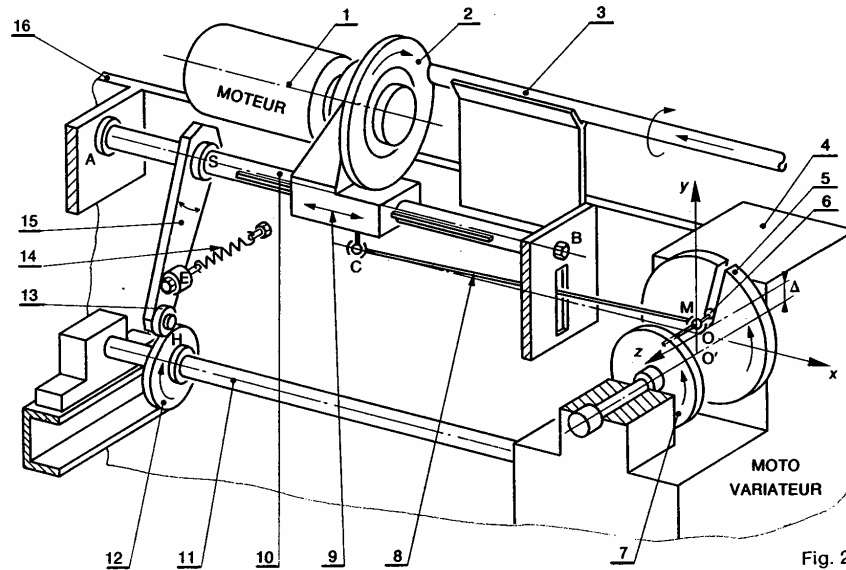


Fig. 22

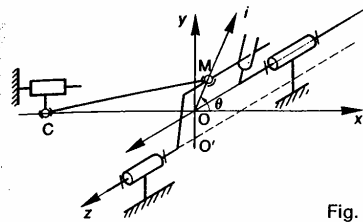


Fig. 23

QUESTIONS

- 1° Tracer la courbe des abscisses du point C, par rapport au bâti, en fonction de l'angle de rotation θ du plateau (5). Pour $\theta = 0$ la bielle (8) est portée par l'axe $(O, \vec{x})$.
- 2° En déduire la courbe des vitesses du point C, par rapport au bâti en fonction de θ . Déterminer l'angle dont a tourné le plateau (5) pendant la période où la vitesse du point C est constante à 10 % près.
- 3° En déduire la courbe des accélérations du point C, par rapport au bâti, en fonction de θ .

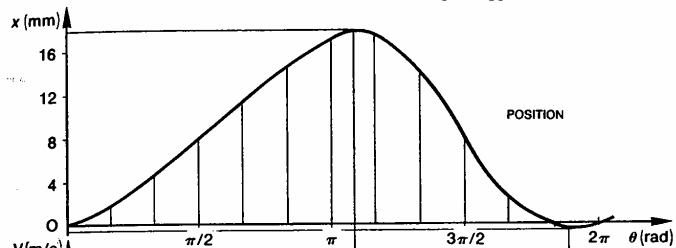


Fig. 24

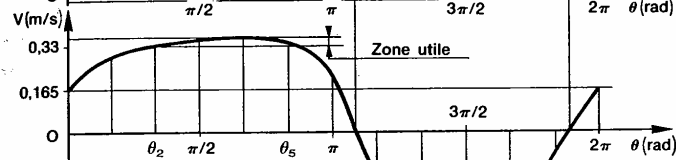


Fig. 25

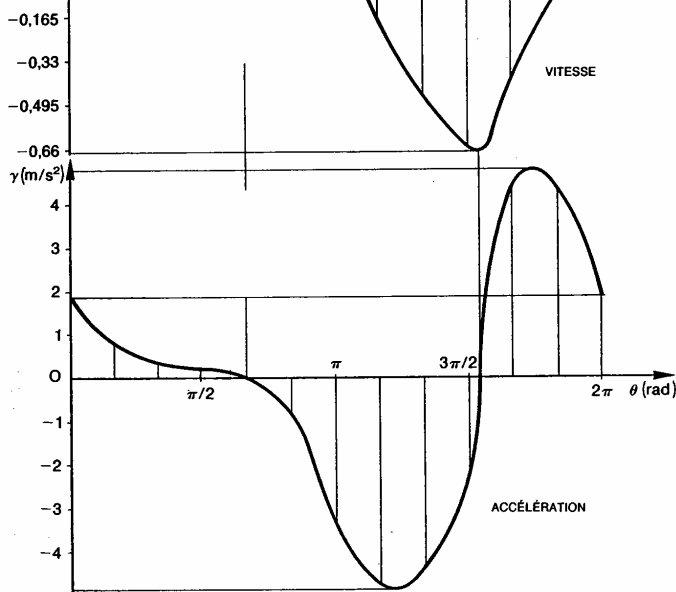


Fig. 26

RÉPONSES

1° Courbe des abscisses du point C (figure 24).

2° Courbe des vitesses du point C (figure 25).

Entre les angles θ_2 et θ_3 , la vitesse du point C est constante à 10 % près, soit un quart de tour du plateau (5).

3° Courbe des accélérations du point C (figure 26).

4 — Détermination du profil d'une came.

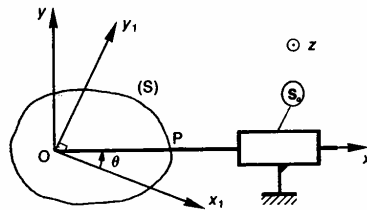


Fig. 27

Soit $R(O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ un repère lié à un bâti (S_0). La came (S) a une liaison pivot d'axe $(O, \vec{z})$ avec (S_0). Soit $R_1(O, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z})$ un repère lié à (S).

On pose $\theta \equiv (\vec{x}_1, \vec{x})$

avec $\theta = \omega t$ (ω constante positive).

La tige T a une liaison glissière d'axe $(O, \vec{x})$ avec (S_0). La came et la tige ont une liaison ponctuelle, de normale perpendiculaire à $\vec{z}$, en un point P de l'axe $(O, \vec{x})$.

On impose $\|\vec{OP}\|_{\min} = a$ et $\|\vec{OP}\|_{\max} = a + h$, et l'on pose

$$\vec{OP} = \rho \vec{x} = (a + x) \vec{x}.$$

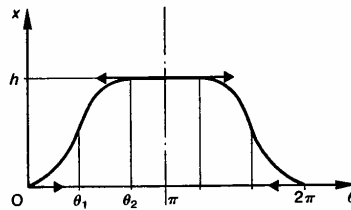


Fig. 28

Le profil de la came doit être tel que :

- quand θ varie de 0 à θ_1 (θ_1 donné) la tige ait un mouvement uniformément accéléré, d'accélération γ_1 ($\gamma_1 > 0$);
- quand θ varie de θ_1 à θ_2 (θ_2 donné) la tige ait un mouvement uniformément retardé, d'accélération $-\gamma_2$ ($\gamma_2 > 0$);

- quand θ varie de θ_2 à π la tige reste immobile;
 - quand θ varie de π à 2π la tige ait un mouvement symétrique de celui défini entre 0 et π .
- De plus, on veut que x et x' n'aient pas de discontinuités entre les différentes phases du mouvement.

QUESTIONS

1° Déterminer γ_1 et γ_2 en fonction de θ_1 , θ_2 , ω et h . Faire l'application numérique pour :

$$\begin{cases} \theta_1 = 40^\circ \\ \theta_2 = 60^\circ \\ \omega = 209,3 \text{ rad/s } (= 2000 \text{ tr/min}) \\ h = 10 \text{ mm.} \end{cases}$$

2° En déduire le profil de la came. Le tracer approximativement pour $a = 20 \text{ mm}$.

RÉPONSES

$$1^\circ \gamma_1 = \frac{2\omega^2 h}{\theta_1 \theta_2} = 1200 \text{ m/s}^2$$

$$\gamma_2 = \frac{2\omega^2 h}{\theta_2(\theta_2 - \theta_1)} = 2400 \text{ m/s}^2.$$

2° Équation polaire de la came :

$$\theta \in [0, \theta_1]: \quad \rho = a + \frac{h\theta^2}{\theta_1 \theta_2}$$

$$\theta \in [\theta_1, \theta_2]: \quad \rho = a + \frac{h(-\theta^2 + 2\theta_2\theta - \theta_1\theta_2)}{\theta_2(\theta_2 - \theta_1)}$$

$$\theta \in [\theta_2, \pi]: \quad \rho = a + h.$$

L'allure du profil de la came est le suivant :

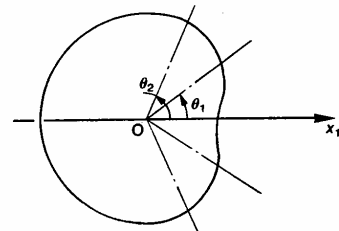


Fig. 29

5 — Soit $R(O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ un repère lié à la Terre. L'origine O est située au centre de la Terre et l'axe $(O, \vec{z})$ est dirigé suivant l'axe des pôles, orienté du pôle Sud vers le pôle Nord (figure 30).

Un repère local $R_1(M, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ utile au point M pour la navigation à la surface de la Terre est constitué de la manière suivante :

L'axe $(M, \vec{i})$, tangent au parallèle de M, est orienté vers l'Est.

L'axe $(M, \vec{j})$, tangent au méridien de M, est orienté vers le Nord.

L'axe $(M, \vec{k})$ est orienté suivant la verticale ascendante de M.

Soit $\alpha(t)$ la longitude du point M, mesurée autour de $\vec{z}$.
 Soit $\beta(t)$ la latitude du point M, mesurée autour de $-\vec{i}$.
 Soit r le rayon de la Terre.

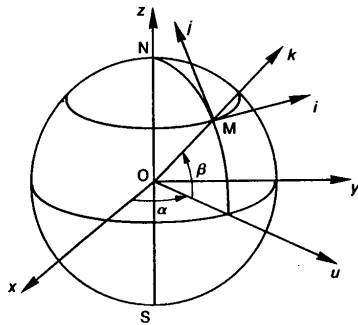


Fig. 30

QUESTIONS

Déterminer :

- 1° Le vecteur rotation de la base du repère R_1 par rapport à la base du repère R : $\vec{\Omega}(R_1/R)$.
- 2° Le vecteur vitesse du point M par rapport au repère R , $\vec{V}(M/R)$, exprimé dans la base du repère R_1 .
- 3° Le vecteur accélération du point M par rapport au repère R , $\vec{\Gamma}(M/R)$, exprimé dans la base du repère R_1 .

RÉPONSES

- 1° $\vec{\Omega}(R_1/R) = \alpha' \vec{z} - \beta' \vec{i}$
- 2° $\vec{V}(M/R) = r\alpha' \cos \beta \vec{i} + r\beta' \vec{j}$
- 3° $\vec{\Gamma}(M/R) = r(\alpha'' \cos \beta - 2\alpha'\beta' \sin \beta) \vec{i} + r(\beta'' + \alpha'^2 \sin \beta \cos \beta) \vec{j} + r(-\beta'^2 - \alpha'^2 \cos^2 \beta) \vec{k}$.

EXERCICES SANS RÉPONSE

6 — La figure 31 représente un dispositif de commande de table vibrante.

L'excentrique (E) est un disque de centre C et de rayon a , qui tourne autour de l'axe $(O, \vec{z}_0)$ fixe par rapport au bâti (B).

La table schématisée par le rectangle (T) est en liaison glissière d'axe $(O, \vec{x}_0)$ avec le bâti (B). Le ressort assure le maintien du contact entre (E) et (T).

L'excentricité OC vaut $a/2$.

Soit $R_0(O, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$ le repère lié au bâti et $R_1(O, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_0)$ le repère lié à l'excentrique.

Soit A le point de la table (T) du plan de contact avec l'excentrique (E), situé sur l'axe $(O, \vec{x}_0)$.

On pose :

$$\vec{OA} = x(t) \vec{x}_0 \quad \text{et} \quad \theta = (\vec{x}_0, \vec{x}_1)$$

avec $\theta = \omega t$ (ω constante positive).

Rayon de l'excentrique : $a = 10$ mm; vitesse de rotation uniforme de l'excentrique : $\omega = 10,47$ rad/s ($= 100$ tr/min).

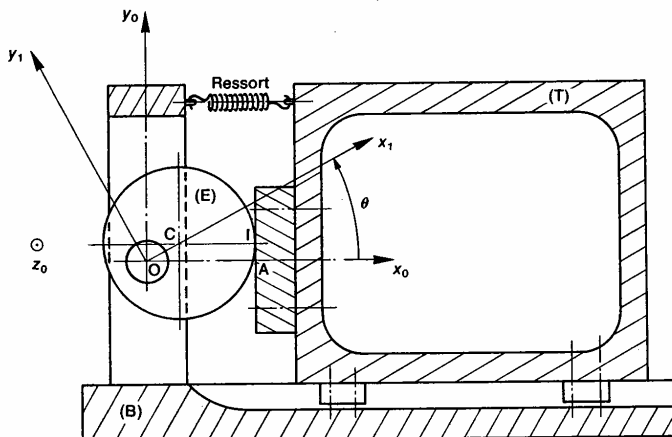


Fig. 31

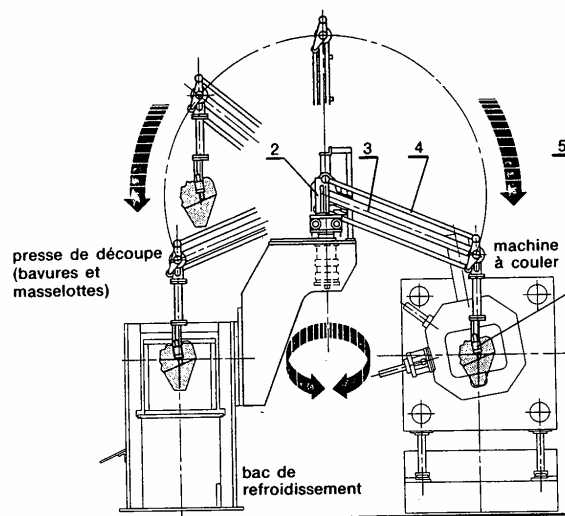


Fig. 32

QUESTIONS

- 1° Exprimer $x(t)$ en fonction de a , ω et t .
- 2° Construire la courbe représentative de la fonction $x(t)$ pour $t \in [0; 0,6]$, t est exprimée en secondes.
- 3° Exprimer le vecteur vitesse du point A par rapport au bâti : $\vec{V}(A/R_0)$.
- 4° Construire la courbe représentative de la valeur algébrique $v(t)$ du vecteur vitesse $\vec{V}(A/R_0) = v(t) \vec{x}_0$ pour $t \in [0; 0,6]$, t en secondes.
- 5° Exprimer le vecteur accélération du point A par rapport au bâti : $\vec{\Gamma}(A/R_0)$.
- 6° Construire la courbe représentative de la valeur algébrique $\gamma(t)$ du vecteur accélération $\vec{\Gamma}(A/R_0) = \gamma(t) \vec{x}_0$ pour $t \in [0; 0,6]$, t en secondes.

7 — Le manipulateur de fonderie (figure 32) permet saisir la pièce lors de son éjection de la machine coulée, d'assurer son transport vers le bac de refroidissement et vers la machine de démasclotage d'ébavurage.

Soit $R_0(O, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$ le repère lié au bâti définissant la position initiale du manipulateur face à la machine à couler et $R_3(O, \vec{x}_3, \vec{y}_3, \vec{z}_3)$ le repère lié au bras (3). La pose $\theta = (\vec{x}_0, \vec{x}_3)$.

Le mouvement de rotation du bras comporte trois phases :

- a) Quand θ varie de 0° à 15° ($15^\circ = \frac{\pi}{12} \text{ rad}$) le bras a un mouvement de rotation uniformément accéléré.
- b) Quand θ varie de 15° à 195° , le bras a un mouvement de rotation uniforme à la vitesse angulaire de 1 rad/s .

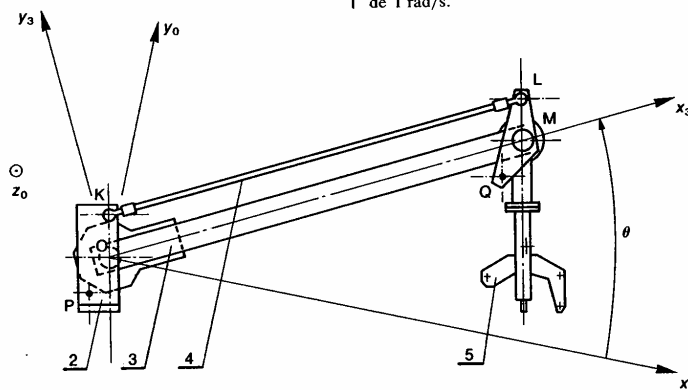


Fig. 33

Quand θ varie de 195° à 225° , le bras a un mouvement de rotation uniformément décéléré. Les vitesses angulaires de départ et d'arrivée sont nulles. Le bras moteur (3) et la barre (4) ont même longueur $l = OM = KL = 1700$ mm.

QUESTIONS

1° Déterminer la durée, l'accélération ou la décélération angulaire de chaque phase.

2° Tracer les diagrammes des rotations, des vitesses et des accélérations ou décélérations angulaires du bras (3) par rapport au bâti. Indiquer les valeurs numériques remarquables.

3° Donner les expressions des vecteurs vitesse et accélération du point M par rapport au bâti :

$$\vec{V}(M/R_0) \text{ et } \vec{\Gamma}(M/R_0),$$

en fonction de l , θ' , θ'' , et exprimées dans la base du repère R_3 .

Applications numériques :

$$l = 1700 \text{ mm}, \quad \theta' = 1 \text{ rad/s}, \quad \theta'' = 0.$$

8 — La figure 34 représente un compresseur ROOT utilisé sur le moteur à compresseur volumétrique des véhicules LANCIA. L'air est véhiculé dans le creux des dents, entre le carter et le pignon.

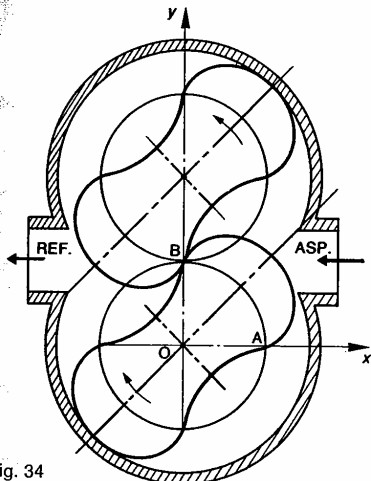


Fig. 34

Pour expliquer le mouvement de génération d'un des quatre profils extérieurs aux cercles primitifs (C_1) et (C_2), adoptons le schéma d'étude suivant pour le profil AB.

Soit (C) un cercle de centre O, de rayon $4a$, situé dans le plan $(O, \vec{x}, \vec{y})$ d'un repère $R(O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ et lié à ce repère.

Soit (C') un cercle de centre O', de rayon a , situé dans le plan $(O, \vec{x}, \vec{y})$ du repère R et en contact extérieur en un point I de sa circonférence avec le cercle (C).

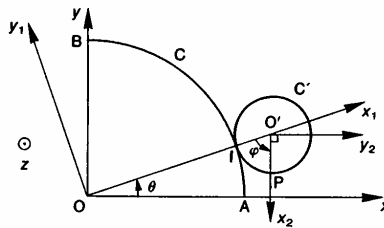


Fig. 35.

Soit $R_1(O, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z})$ un repère tel que :

$$\vec{OO'} = 5a \vec{x}_1.$$

On pose $\theta = (\vec{x}, \vec{x}_1)$, avec $\theta = \omega t$ (ω constante positive).

Soit $R_2(O', \vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z})$ un repère lié au cercle (C') on pose :

$$\varphi = (-\vec{x}_1, \vec{x}_2).$$

Soit P un point du cercle (C') tel que

$$\vec{O'P} = a \vec{x}_2.$$

Le cercle (C') roule sans glisser sur le cercle (C), c'est-à-dire qu'à chaque instant : $AI = IP$.

Le taillage du profil s'effectue de la façon suivante : Pendant que la machine à tailler réalise le mouvement de roulement sans glissement du cercle (C') sur le cercle (C) la pointe de l'outil décrit à cadence rapide l'axe $(P, \vec{z})$.

QUESTIONS

1° Quelle relation y a-t-il entre φ et θ ?

2° Déterminer l'équation paramétrique de la trajectoire du point P dans le repère R. La tracer pour $\theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$.

3° Déterminer $\vec{\Omega}(R_1/R)$ et $\vec{\Omega}(R_2/R)$.

4° Calculer $\vec{V}(P/R)$ (vitesse d'avance).

5° Calculer $\vec{\Gamma}(P/R)$.

9 — La figure 36 représente le corps (S_0) d'un aérogénérateur à hélice bipale muni d'un empennage lui permettant de s'orienter dans le « lit » du vent.

Soit $R_0(O, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$ un repère lié au corps (S_0). Le rotor (S_1) entraîne un alternateur électrique situé dans le corps (S_0) et a une liaison pivot d'axe $(O, \vec{y}_0)$ avec celui-ci. Soit $R_1(O, \vec{x}_1, \vec{y}_0, \vec{z}_1)$ un repère lié à (S_1). On pose $\theta = (\vec{z}_0, \vec{z}_1)$, avec

$$\theta = \omega t \quad \text{et} \quad \omega = 120 \text{ rad/s}.$$

Par fort vent un dispositif de mise en drapeau permet aux pales de l'hélice de pivoter autour de l'axe $(O, \vec{x}_1)$.

Soit $R_2(O, \vec{x}_1, \vec{y}_2, \vec{z}_2)$ un repère lié à la pale (S_2) tel que l'axe $(O, \vec{z}_2)$ soit dirigé suivant la droite de référence AB de la pale. On pose $\beta = (\vec{z}_1, \vec{z}_2)$, en fonctionnement normal l'angle de calage $\beta = 20^\circ$.

Soit G le centre d'inertie de la pale (S_2), tel que

$$\vec{OG} = a \vec{x}_1 + c \vec{z}_2$$

avec $a = 160 \text{ mm}$ et $c = 13 \text{ mm}$.

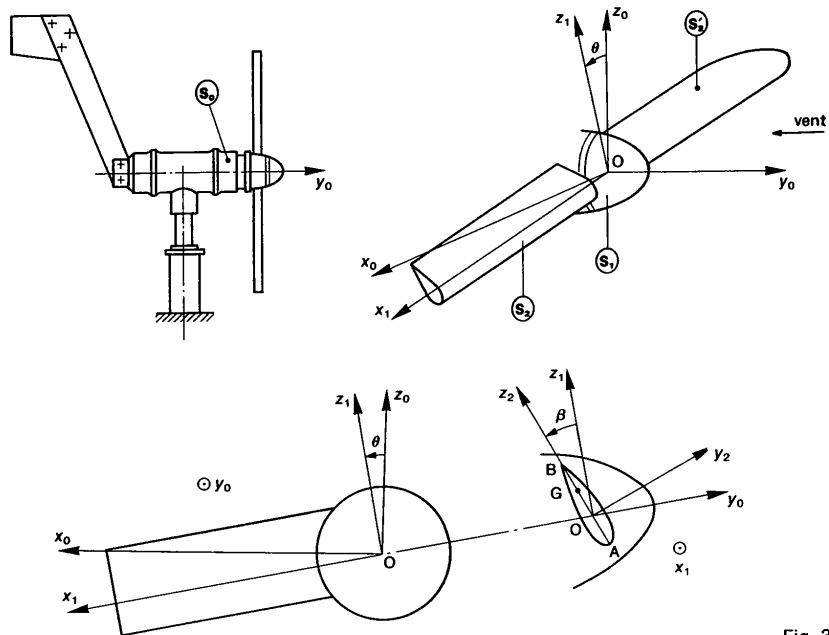


Fig. 36

QUESTIONS

1° Construire le schéma cinématique de l'aérogénérateur.

2° Déterminer la norme du vecteur vitesse du point G par rapport au bâti R_0 : $\|\vec{V}(G/R_0)\|$ lorsque l'angle β reste égal à 20° .

3° Déterminer la norme du vecteur accélération du point G par rapport au bâti R_0 : $\|\vec{\Gamma}(G/R_0)\|$ lorsque l'angle β reste égal à 20° .

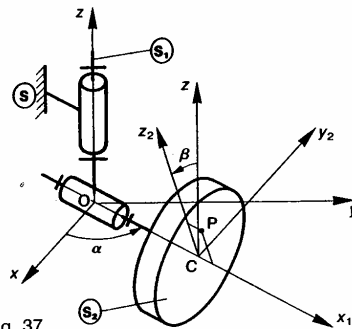


Fig. 37

10 — Le schéma cinématique d'une équilibreuse de roue de véhicule est donné figure 37:

$R(O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ est un repère lié au bâti (S) de l'équilibreuse. Le bras (S_1) a une liaison pivot d'axe $(O, \vec{z})$ avec (S). Soit $R_1(O, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$ un repère lié à (S_1). On pose $\alpha(t) = (\vec{x}, \vec{x}_1)$.

La roue (S_2) de centre C a une liaison pivot d'axe $(O, \vec{x}_1)$ avec (S_1). Soit $R_2(C, \vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_2)$ un repère lié à (S_2), tel que

$$\vec{OC} = r\vec{x}_1 \quad (r \text{ constante positive}).$$

On pose $\beta(t) = (\vec{z}_1, \vec{z}_2)$.

Lorsque la roue n'est pas équilibrée, les effets dynamiques font varier l'angle α entre deux bornes qui peuvent être mesurées.

Afin de supprimer cette variation, des masselottes appropriées sont placées sur la périphérie de la jante. Une masselotte d'équilibrage est assimilée à un point P, dont la position dans R_2 est définie par :

$$\vec{CP} = a\vec{x}_2 + c\vec{z}_2$$

(a et c sont des constantes positives).

QUESTIONS

1° Déterminer le vecteur vitesse du point P par rapport au bâti (S) : $\vec{V}(P/R)$.

2° Déterminer le vecteur accélération du point P par rapport au bâti (S) : $\vec{\Gamma}(P/R)$.

3

champ des vecteurs vitesse et accélération des points d'un solide

Deux points, appartenant à un même solide, restant à une distance constante l'un de l'autre, il est logique de supposer que leurs vecteurs vitesse, comme leurs vecteurs accélération, ne sauraient être indépendants les uns des autres et que, par conséquent, il existe des relations entre ces vecteurs. L'objet du présent chapitre est précisément de mettre en évidence ces relations.

1 CHAMP DES VECTEURS VITESSE DES POINTS D'UN SOLIDE

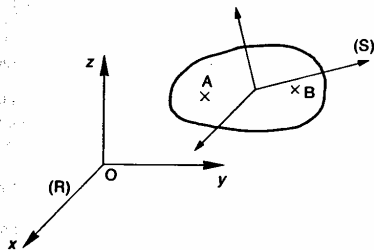


Fig. 1

Soit un solide (S) en mouvement par rapport à un repère $R(O, \hat{x}, \hat{y}, \hat{z})$.
Considérons deux points A et B de ce solide.
Entre la dérivée du vecteur $\overline{AB}$ dans la base de R et la dérivée du vecteur $\overline{AB}$ dans la base d'un repère lié au solide (S) (repère que l'on notera (S) comme le solide) il existe la relation :

$$\left[\frac{d\overline{AB}}{dt} \right]_R = \left[\frac{d\overline{AB}}{dt} \right]_S + \vec{\Omega}(S/R) \wedge \overline{AB}$$

or $\left[\frac{d}{dt} \overline{AB} \right]_S = \vec{0}$, le vecteur $\overline{AB}$ étant constant dans la base liée à (S), et

$$\begin{aligned} \left[\frac{d\overline{AB}}{dt} \right]_R &= \left[\frac{d\overline{OB}}{dt} \right]_R - \left[\frac{d\overline{OA}}{dt} \right]_R \\ &= \vec{V}(B/R) - \vec{V}(A/R) \end{aligned}$$

par conséquent, la relation entre les deux vecteurs vitesse $\vec{V}(B/R)$ et $\vec{V}(A/R)$ est la suivante :

$$\vec{V}(B/R) = \vec{V}(A/R) + \vec{\Omega}(S/R) \wedge \overline{AB}. \quad (1)$$

Les vecteurs vitesse des points d'un solide vérifient donc la relation de changement de point du moment d'un torseur. Par suite, le champ des vecteurs vitesse des points d'un solide répond à la définition d'un torseur, ce qui nous permet d'énoncer le théorème suivant :

1.1. THÉORÈME

Le champ des vecteurs vitesse des points du solide (S) dans son mouvement par rapport au repère R est représenté, au point A, par le torseur suivant :

$$\{V(S/R)\} = \begin{Bmatrix} \vec{\Omega}(S/R) \\ \vec{V}(A/R) \end{Bmatrix}.$$

Définition

Le torseur $\{V(S/R)\}$ est appelé *torseur cinématique* du solide (S) dans son mouvement par rapport au repère R.

REMARQUE

Le point A est un point lié au solide (S). Si éventuellement dans un exercice un doute est possible, nous noterons ce vecteur vitesse :

$$\vec{V}(A \in S/R).$$

1.2. PROPRIÉTÉS

Le champ des vecteurs vitesse des points d'un solide, étant caractérisé par un torseur, possède toutes les propriétés du torseur.

Nous allons donc voir à quoi correspondent, dans le domaine de la cinématique du solide, les propriétés mathématiques du torseur.

1.2.1. Axe central - moment central

Rappels

— Un **point central** d'un torseur est un point où le moment résultant a même direction que la résultante générale.

— L'**axe central** d'un torseur est la droite constituée par l'ensemble des points centraux (l'axe central n'existe que si la résultante générale du torseur n'est pas nulle).

L'axe central a même direction que la résultante du torseur.

Supposons le torseur défini en un point O par :

$$\left\{ \begin{array}{c} \vec{R} \\ \vec{M}_O \end{array} \right\}_O$$

Alors le pied H de la perpendiculaire abaissée de O sur l'axe central est défini par le vecteur :

$$\vec{OH} = \frac{\vec{R} \wedge \vec{M}_O}{\vec{R}^2} \quad (2)$$

— Le **moment central** d'un torseur est le moment résultant de ce torseur en un point de son axe central.

Le moment central a même direction que l'axe central du torseur.

Le moment central est le même en tout point de l'axe central.

Soit Δ l'axe central du torseur cinématique du mouvement du solide (S) par rapport au repère R (Δ existe si $\vec{\Omega}(S/R) \neq \vec{0}$).

Δ est appelé **axe instantané de rotation et de glissement** dans le mouvement de (S) par rapport à R, ou **axe de viration**.

Cet axe central Δ est défini à toute date t . Lorsque t varie, Δ engendre dans (S) et dans R deux surfaces réglées (surfaces engendrées par une droite) appelées **axoïdes** du mouvement de (S) par rapport à R. Ces deux axoïdes sont tangentes suivant Δ .

Illustrations

• Dans un engrenage cylindrique, si on considère le torseur cinématique qui représente le mouvement d'une roue par rapport à l'autre, nous verrons au chapitre 4 que :

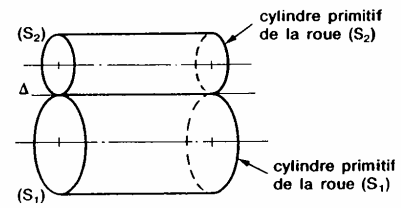


Fig. 2

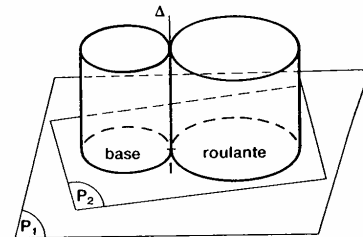


Fig. 3

— L'axe central Δ de ce torseur est la génératrice de contact des cylindres primitifs de l'engrenage.

— Les axoïdes sont les cylindres primitifs.

— Le moment central représente la vitesse de glissement le long de Δ des cylindres primitifs; dans le cas présent cette vitesse est nulle (dans le cas d'un engrenage gauche cette vitesse de glissement n'est pas nulle).

• Dans un mouvement plan sur plan, si on considère le torseur cinématique qui représente le mouvement d'un plan par rapport à l'autre, nous verrons au chapitre 5 que :

— L'axe central Δ de ce torseur est la droite perpendiculaire aux plans passant par le centre instantané de rotation I du mouvement d'un plan par rapport à l'autre.

— Les axoïdes sont deux cylindres de génératrices parallèles à Δ . Leurs sections droites avec les plans définissent la base et la roulante du mouvement plan sur plan.

— Le moment central est nul, car il représente la vitesse du centre instantané de rotation dans le mouvement d'un plan par rapport à l'autre.

1.2.2. Torseurs particuliers

• LE COUPLE

Le torseur cinématique du mouvement du solide par rapport au repère R est un couple, s'il est de la forme :

$$\{ \mathcal{V}(S/R) \} = \left\{ \begin{array}{c} \vec{0} \\ \vec{V}(A/R) \end{array} \right\}$$

avec $\vec{V}(A/R) \neq \vec{0}$.

Calculons le vecteur vitesse d'un point B quelconque du solide (S) à partir du vecteur vitesse du point A, en utilisant la relation (1) :

$$\vec{V}(B/R) = \vec{V}(A/R) + \vec{\Omega}(S/R) \wedge \overline{AB}.$$

Comme : $\vec{\Omega}(S/R) = \vec{0}$

$$\vec{V}(B/R) = \vec{V}(A/R).$$

Par conséquent, à un instant donné, tous les vecteurs vitesse des points du solide ont même direction. Entre deux instants distincts cette direction peut changer.

Le mouvement de (S) par rapport à R est donc un mouvement de translation.

— Mouvement de translation rectiligne

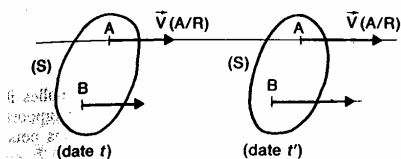


Fig. 4

Le mouvement de translation de (S) par rapport à R est dit rectiligne si la trajectoire d'un point A de (S) dans R est une droite.

Dans ce cas, $\vec{V}(A/R)$ a pour direction la trajectoire du point A.

— Mouvement de translation circulaire

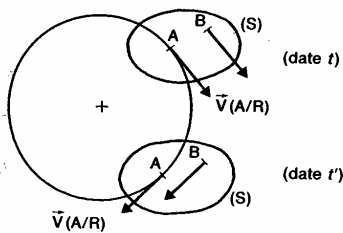


Fig. 5

Le mouvement de translation de (S) par rapport à R est dit circulaire si la trajectoire d'un point A de (S) dans R est un cercle.

Dans ce cas, $\vec{V}(A/R)$ change de direction entre deux dates t et t' .

• LE TORSEUR A RÉSULTANTE

Le torseur cinématique du mouvement du solide (S) par rapport au repère R est un torseur à résultante, s'il est de la forme :

$$\{\mathcal{V}(S/R)\} = \left\{ \begin{array}{c} \vec{\Omega}(S/R) \\ \vec{0} \end{array} \right\}$$

avec $\vec{\Omega}(S/R) \neq \vec{0}$.

Le point A est un point de l'axe central Δ de ce torseur.

Calculons le vecteur vitesse d'un point B quelconque du solide (S), situé sur Δ , à partir du vecteur vitesse du point A :

$$\vec{V}(B/R) = \vec{V}(A/R) + \vec{\Omega}(S/R) \wedge \overline{AB}$$

avec $\vec{V}(A/R) = \vec{0}$.

Le vecteur rotation $\vec{\Omega}(S/R)$ a pour direction Δ ainsi que le vecteur $\overline{AB}$, par conséquent, le produit vectoriel de ces deux vecteurs est nul, et :

$$\vec{V}(B/R) = \vec{0} \quad \forall B \in \Delta.$$

Le mouvement de (S) par rapport à R est donc, à un instant donné, un mouvement de rotation autour de Δ .

Il faut bien préciser que c'est un mouvement de rotation à un instant donné, car, dans le cas général, Δ se déplace dans (S) et dans R lorsque t varie.

Cas particulier

Lorsque Δ est fixe dans (S) et dans R le mouvement de (S) par rapport à R est un mouvement de rotation autour de Δ .

EXEMPLE

Considérons un arbre (S) ayant avec un bâti (S_0) une liaison pivot d'axe $(O, \vec{x})$. Dans ce cas, quel que soit le temps, les points de (S) situés sur l'axe $(O, \vec{x})$ ont une vitesse nulle par rapport à (S_0). Par suite, le torseur représentant le mouvement de (S) par rapport à R est un torseur à résultante dont l'axe central est l'axe de rotation $(O, \vec{x})$.

1.2.3. Équiprojectivité du champ des vecteurs vitesse des points d'un solide

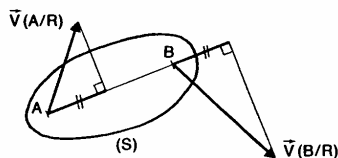


Fig. 6

Le champ des moments d'un torseur étant équiprojectif, le champ des vecteurs vitesse des points d'un solide l'est également.

Cette propriété se traduit par la relation scalaire suivante :

$$\forall A \text{ et } B \in (S) : \quad \overline{AB} \cdot \vec{V}(A/R) = \overline{AB} \cdot \vec{V}(B/R). \quad (3)$$

Cette relation a une interprétation géométrique simple (figure 6) :

A une date t donnée, les projections orthogonales des vecteurs vitesse $\vec{V}(A/R)$ et $\vec{V}(B/R)$ sur un axe de direction AB sont égales.

REMARQUES

— Les projections orthogonales, de vecteurs, sur un axe sont des nombres algébriques, donc faire attention à construire ces projections du même côté par rapport respectivement aux points A et B.

— Intuitivement ce résultat se comprend facilement : un solide étant indéformable par définition, on comprend que nécessairement, sous peine de le voir éclater, la vitesse du point A dans la direction AB doit être la même que la vitesse du point B dans la direction AB .

Ce torseur s'écrit à l'origine du repère $R(O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$:

$$\{\mathcal{V}(S_2/S_1)\} = \begin{Bmatrix} \vec{\Omega}(S_2/S_1) \\ \vec{V}(O \in S_2/S_1) \end{Bmatrix}_O.$$

Nous noterons, quand elles ne sont pas nulles, composantes des éléments de réduction dans la base de R par :

$$\begin{aligned} \vec{\Omega}(S_2/S_1) &= \alpha \vec{x} + \beta \vec{y} + \gamma \vec{z} \\ \vec{V}(O \in S_2/S_1) &= u \vec{x} + v \vec{y} + w \vec{z} \end{aligned}$$

et nous écrivons le torseur cinématique avec composantes de la façon suivante :

$$\{\mathcal{V}(S_2/S_1)\} = \begin{Bmatrix} \alpha & u \\ \beta & v \\ \gamma & w \end{Bmatrix}_O.$$

1.3. TORSEURS CINÉMATIQUES DES LIAISONS

Pour les liaisons entre deux solides (S_1) et (S_2) que nous avons définies au chapitre 1 nous allons indiquer la forme du torseur cinématique $\{\mathcal{V}(S_2/S_1)\}$ de chaque liaison.

Pour mettre en évidence les composantes nulle faut placer convenablement le repère R par rapport à la liaison. C'est pourquoi, nous préciserons, pour chaque liaison, dans le tableau de la figure 7, quel point on peut exprimer le torseur cinématique pour qu'il conserve ses composantes nulles, la base $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ restant inchangée (colonne « forme particulière conservée » du tableau).

TORSEURS CINÉMATIQUES DES LIAISONS					
Liaison	$\{\mathcal{V}(S_2/S_1)\}$	Forme particulière conservée	Liaison	$\{\mathcal{V}(S_2/S_1)\}$	Forme particulière conservée
ponctuelle de normale $(O, \vec{z})$	$\begin{Bmatrix} \alpha & u \\ \beta & v \\ \gamma & 0 \end{Bmatrix}_O$	points de $(O, \vec{z})$	pivot glissant d'axe $(O, \vec{x})$	$\begin{Bmatrix} \alpha & u \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_O$	points de $(O, \vec{x})$
linéique rectiligne d'axe $(O, \vec{x})$ de normale $(O, \vec{z})$	$\begin{Bmatrix} \alpha & u \\ 0 & v \\ \gamma & 0 \end{Bmatrix}_O$	points du plan $(O, \vec{z}, \vec{x})$	glissière hélicoïdale d'axe $(O, \vec{x})$	$\begin{Bmatrix} \alpha & u \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_O$ $u = p\alpha$	points de $(O, \vec{x})$
linéique annulaire d'axe $(O, \vec{x})$	$\begin{Bmatrix} \alpha & u \\ \beta & 0 \\ \gamma & 0 \end{Bmatrix}_O$	au point O	glissière d'axe $(O, \vec{x})$	$\begin{Bmatrix} 0 & u \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_O$	en tout point
rotule de centre O	$\begin{Bmatrix} \alpha & 0 \\ \beta & 0 \\ \gamma & 0 \end{Bmatrix}_O$	au point O	pivot d'axe $(O, \vec{x})$	$\begin{Bmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_O$	points de $(O, \vec{x})$
appui plan de normale $(O, \vec{z})$	$\begin{Bmatrix} 0 & u \\ 0 & v \\ \gamma & 0 \end{Bmatrix}_O$	en tout point	encastrement	$\begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_O$	en tout point

Fig. 7

1.4. TORSEUR DES PETITS DÉPLACEMENTS DES POINTS D'UN SOLIDE

1.4.1. Déplacements des points d'un solide

Soit un solide (S) en mouvement par rapport à un repère R. Notons (1) sa position dans R à la date t et (2) sa position dans R à la date t' (figure 8).

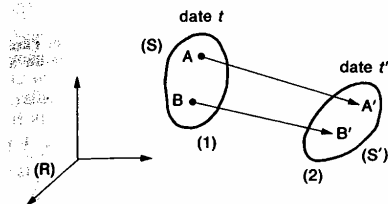


Fig. 8

Soient deux points quelconques du solide (S), notés A et B à la date t et A' et B' à la date t' .

Définition

Le vecteur $\overrightarrow{AA'}$ est appelé *vecteur déplacement* du point A par rapport au repère R, entre les dates t et t' .

De même, le vecteur $\overrightarrow{BB'}$ est appelé *vecteur déplacement* du point B par rapport au repère R, entre les dates t et t' .

Lorsque la position (2) du solide (S) est quelconque par rapport à sa position (1), il n'y a pas de relation simple entre les vecteurs déplacement des points A et B. Par contre, si la position (2) est voisine de la position (1), il existe entre les vecteurs $\overrightarrow{AA'}$ et $\overrightarrow{BB'}$ une relation analogue à celle qui existe entre les vecteurs vitesse des points A et B, relation que nous allons démontrer.

1.4.2. Petits déplacements des points d'un solide

Considérons, à la date t , le torseur cinématique du mouvement du solide (S) par rapport au repère R.

$$\{\mathcal{V}(S/R)\} = \begin{Bmatrix} \vec{\Omega}(S/R) \\ \vec{V}(A/R) \end{Bmatrix}$$

Entre les vecteurs vitesse des deux points A et B du solide (S) existe la relation que nous avons repérée (1) au paragraphe 1 :

$$\vec{V}(B/R) = \vec{V}(A/R) + \vec{\Omega}(S/R) \wedge \overrightarrow{AB}.$$

Posons $t' = t + dt$, dt représentant un intervalle de temps élémentaire, et multiplions les deux membres de l'égalité précédente par dt :

$$\vec{V}(B/R) dt = \vec{V}(A/R) dt + \vec{\Omega}(S/R) dt \wedge \overrightarrow{AB}.$$

Posons :

$$\begin{cases} \vec{U}(A/R) = \vec{V}(A/R) dt \\ \vec{U}(B/R) = \vec{V}(B/R) dt \\ \vec{W}(S/R) = \vec{\Omega}(S/R) dt. \end{cases}$$

Le vecteur déplacement élémentaire du point A est en toute rigueur le vecteur $\overrightarrow{AA'}$ représenté figure 9.

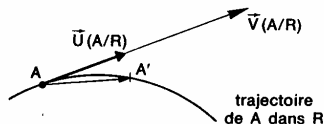


Fig. 9

Lorsque $dt \rightarrow 0$, on considère que le vecteur $\vec{U}(A/R)$ est pratiquement égal au vecteur $\overrightarrow{AA'}$ et qu'il représente lui aussi le déplacement élémentaire, ou le petit déplacement, du point A par rapport au repère R.

Définitions

$\vec{U}(A/R)$ est appelé *vecteur petit déplacement* du point A par rapport au repère R, à la date t .

$\vec{W}(S/R)$ est appelé *vecteur petite rotation* du solide (S) par rapport au repère R, à la date t .

Par suite, entre les vecteurs petits déplacements des deux points A et B du solide (S) existe la relation :

$$\vec{U}(B/R) = \vec{U}(A/R) + \vec{W}(S/R) \wedge \overrightarrow{AB}.$$

relation qui montre que le champ des vecteurs petits déplacements des points du solide (S) par rapport au repère R peut être représenté par un torseur, que nous écrirons au point A de la façon suivante :

$$\{\mathcal{U}(S/R)\} = \begin{Bmatrix} \vec{W}(S/R) \\ \vec{U}(A/R) \end{Bmatrix}.$$

Définition

Le torseur $\{\mathcal{U}(S/R)\}$ est appelé *torseur des petits déplacements* des points du solide (S) par rapport au repère R.

REMARQUES

— Généralement, on considère que le solide (S) a un petit déplacement, par rapport au repère R, lorsque les déplacements de ses points sont de quelques millimètres et sa rotation de quelques degrés.

— Cette notion de torseur des petits déplacements est utile pour déterminer simplement le petit déplacement d'un point particulier d'un solide,

car ce calcul se ramène, en fait, au calcul du vecteur vitesse de ce point.

— En résistance des matériaux, on définit le déplacement du repère principal d'inertie quadratique d'une section droite d'une poutre, entre la position non déformée et la position déformée de cette poutre, par un torseur de petits déplacements défini au centre de gravité de la section droite considérée.

— En métrologie, pour optimiser la position d'une première surface théorique associée à la surface réelle, nécessaire pour mesurer les écarts de position et de forme, on définit une deuxième surface théorique associée qui se déduit de la première par un torseur de petits déplacements.

1.4.3. Application

Soit $R(O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ un repère lié au bâti (S_0) d'un système bielle-manivelle représenté par la figure 10.

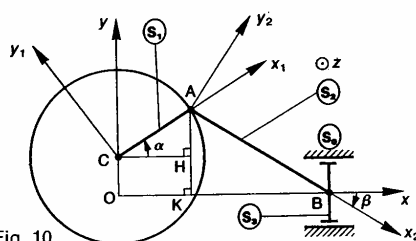


Fig. 10

La manivelle (S_1) a une liaison pivot d'axe $(C, \vec{z})$ avec (S_0) telle que : $\vec{OC} = h\vec{y}$ ($h > 0$). Soit $R_1(C, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$ un repère lié à (S_1). On pose $\alpha = (\vec{x}, \vec{x}_1)$.

La bielle (S_2) d'extrémités A et B a une liaison rotule de centre A avec (S_1) telle que : $\vec{CA} = r\vec{x}_1$ ($r > 0$) et une liaison rotule de centre B avec le coulisseau (S_3) telle que le point B décrive l'axe $(O, \vec{x})$. Soit $R_2(A, \vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_2)$ un repère lié à (S_2) tel que $\vec{AB} = l\vec{x}_2$ ($l > 0$). On pose $\beta = (\vec{x}, \vec{x}_2)$.

QUESTION 1

Déterminer les vecteurs vitesse $\vec{V}(A/R)$ et $\vec{V}(B/R)$.

RÉPONSE

Les deux points C et A appartenant au même solide (S_1), calculons $\vec{V}(A/R)$ à partir de $\vec{V}(C/R)$:

$$\vec{V}(A/R) = \vec{V}(C/R) + \vec{\Omega}(S_1/R) \wedge \vec{CA}$$

$$= \vec{0} + \alpha' \vec{z} \wedge r\vec{x}_1$$

comme $\vec{z} \wedge \vec{x}_1 = \vec{y}_1$, on peut écrire :

$$\vec{V}(A/R) = r\alpha' \vec{y}_1$$

Les deux points A et B appartenant au même solide (S_2), calculons $\vec{V}(B/R)$ à partir de $\vec{V}(A/R)$:

$$\vec{V}(B/R) = \vec{V}(A/R) + \vec{\Omega}(S_2/R) \wedge \vec{AB}$$

$$= r\alpha' \vec{y}_1 + \beta' \vec{z} \wedge l\vec{x}_2$$

comme $\vec{z} \wedge \vec{x}_2 = \vec{y}_2$ on peut écrire :

$$\vec{V}(B/R) = r\alpha' \vec{y}_1 + l\beta' \vec{y}_2$$

QUESTION 2

Déterminer la relation entre les angles α et β .

RÉPONSE

En remarquant que : $\vec{HA} = \vec{KA} - h$

$$\text{avec } \begin{cases} \vec{HA} = r \sin \alpha \\ \vec{KA} = -l \sin \beta \end{cases} \quad (\beta < 0 \text{ sur la figure}).$$

On obtient la relation :

$$r \sin \alpha = -l \sin \beta - h.$$

QUESTION 3

Déterminer le petit déplacement du point B suivant l'axe $(O, \vec{x})$ lorsque la manivelle (S_1) tourne d'un angle $d\alpha$ partir d'une position α donnée.

Application numérique :

$$\begin{aligned} r &= 20 \text{ mm} \\ l &= 50 \text{ mm} \\ h &= 10 \text{ mm} \\ \alpha &= 30^\circ \\ d\alpha &= 2^\circ. \end{aligned}$$

RÉPONSE

Le petit déplacement du point B par rapport au repère est :

$$\vec{U}(B/R) = \vec{V}(B/R) dt$$

sachant que :

$$\vec{V}(B/R) = r\alpha' \vec{y}_1 + l\beta' \vec{y}_2$$

et que :

$$\begin{cases} \alpha' dt = d\alpha \\ \beta' dt = d\beta \end{cases}$$

$\vec{U}(B/R)$ s'écrit :

$$\vec{U}(B/R) = r d\alpha \vec{y}_1 + l d\beta \vec{y}_2.$$

REMARQUE

Si t est exprimé en secondes et α' en radians par seconde, $d\alpha$ s'exprime en radians.

Soit en projection sur $\vec{x}$:

$$U_x(B/R) = -r \sin \alpha d\alpha - l \sin \beta d\beta.$$

Exprimons ce déplacement élémentaire en fonction de $d\alpha$.

$d\beta$ s'obtient en différenciant la relation :

$$r \sin \alpha = -l \sin \beta - h$$

soit

$$r \cos \alpha d\alpha = -l \cos \beta d\beta$$

$$\text{d'où } d\beta = -\frac{r}{l} \times \frac{\cos \alpha}{\cos \beta} d\alpha \quad (\text{si } \cos \beta \neq 0).$$

Par suite :

$$U_x(B/R) = -r \sin \alpha d\alpha + r \cos \alpha \tan \beta d\alpha$$

$$U_x(B/R) = -r [\sin \alpha - \cos \alpha \tan \beta] d\alpha.$$

Application numérique

Avec les valeurs proposées :

$$\sin \beta = -\frac{1}{l} (h + r \sin \alpha) = -0,4$$

d'où

$$\beta = -23,58^\circ$$

et

$$U_x(B/R) = -0,61 \text{ mm}.$$

2 CHAMP DES VECTEURS ACCÉLÉRATION DES POINTS D'UN SOLIDE

Soit un solide (S) en mouvement par rapport à un repère $R(O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$.
Considérons deux points A et B de ce solide.
Entre les vecteurs vitesse des deux points A et B du solide (S) par rapport au repère R, nous avons établi la relation (1) (voir paragraphe 1) :

$$\vec{V}(B/R) = \vec{V}(A/R) + \vec{\Omega}(S/R) \wedge \overline{AB}.$$

Pour obtenir la relation entre les vecteurs accélération des deux points A et B du solide (S) par rapport au repère R, dérivons les deux membres de cette égalité par rapport à la date t , pour un observateur lié au repère R.

$$\left[\frac{d}{dt} \vec{V}(B/R) \right]_R = \left[\frac{d}{dt} \vec{V}(A/R) \right]_R + \left[\frac{d}{dt} (\vec{\Omega}(S/R) \wedge \overline{AB}) \right]_R.$$

Soit

$$\vec{\Gamma}(B/R) = \vec{\Gamma}(A/R) + \left[\frac{d}{dt} \vec{\Omega}(S/R) \right]_R \wedge \overline{AB} + \vec{\Omega}(S/R) \wedge \left[\frac{d}{dt} \overline{AB} \right]_R.$$

Pour calculer $\left[\frac{d}{dt} \overline{AB} \right]_R$ utilisons la base liée à (S) :

$$\left[\frac{d}{dt} \overline{AB} \right]_R = \left[\frac{d}{dt} \overline{AB} \right]_S + \vec{\Omega}(S/R) \wedge \overline{AB}.$$

Le vecteur $\left[\frac{d}{dt} \overline{AB} \right]_S$ est nul car le vecteur $\overline{AB}$ est constant dans (S).

Par conséquent, la relation entre les 2 vecteurs accélération $\vec{\Gamma}(B/R)$ et $\vec{\Gamma}(A/R)$ est la suivante :

$$\vec{\Gamma}(B/R) = \vec{\Gamma}(A/R) + \left[\frac{d}{dt} \vec{\Omega}(S/R) \right]_R \wedge \overline{AB} + \vec{\Omega}(S/R) \wedge [\vec{\Omega}(S/R) \wedge \overline{AB}]. \quad (4)$$

Les vecteurs accélération des points d'un solide ne vérifient pas la relation de changement de point du moment d'un torseur à cause de l'existence du dernier terme $\vec{\Omega}(S/R) \wedge [\vec{\Omega}(S/R) \wedge \overline{AB}]$. Par suite, le champ des vecteurs accélération des points d'un solide n'est pas représentable par un torseur.

REMARQUE

Si nécessaire, pour bien préciser que le point A est lié au solide (S) nous noterons le vecteur accélération :

$$\vec{\Gamma}(A \in S/R).$$

Application

Soit $R(O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ un repère lié à un bâti (S_0).
Considérons un solide (S) ayant avec (S_0) une liaison pivot d'axe $(O, \vec{z})$ (figure 11).

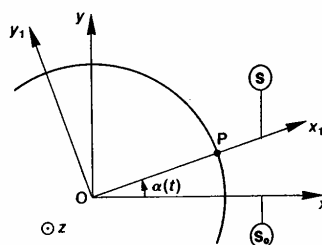


Fig. 11

Soit $R_1(O, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z})$ un repère lié à (S).

Posons $\alpha(t) = (x, \vec{x}_1)$.

Soit P un point du solide (S) tel que

$$\overline{OP} = a\vec{x}_1 \quad (a : \text{constante positive}).$$

QUESTION

Déterminer le vecteur accélération du point P par rapport au repère R : $\vec{\Gamma}(P/R)$.

RÉPONSE

En écrivant entre les points O et P la relation (4), on obtient :

$$\vec{\Gamma}(P/R) = \vec{\Gamma}(O/R) + \left[\frac{d}{dt} \vec{\Omega}(S/R) \right]_R \wedge \overline{OP} + \vec{\Omega}(S/R) \wedge [\vec{\Omega}(S/R) \wedge \overline{OP}].$$

Le point O étant fixe dans le repère R :

$$\vec{\Gamma}(O/R) = \vec{0}.$$

De plus :

$$\vec{\Omega}(S/R) = \alpha' \vec{z}$$

et

$$\left[\frac{d}{dt} \vec{\Omega}(S/R) \right]_R = \alpha'' \vec{z}.$$

Alors

$$\vec{\Gamma}(P/R) = \alpha'' \vec{z} \wedge a\vec{x}_1 + \alpha' \vec{z} \wedge (\alpha' \vec{z} \wedge a\vec{x}_1).$$

En remarquant que $\vec{z} \wedge \vec{x}_1 = \vec{y}_1$, $\vec{\Gamma}(P/R)$ s'écrit :

$$\vec{\Gamma}(P/R) = a\alpha'' \vec{y}_1 + \alpha'^2 \vec{z} \wedge a\alpha' \vec{y}_1.$$

Soit, avec $\vec{z} \wedge \vec{y}_1 = -\vec{x}_1$:

$$\vec{\Gamma}(P/R) = a\alpha'' \vec{y}_1 - a\alpha'^2 \vec{x}_1.$$

A SAVOIR

1. Le torseur cinématique du mouvement du solide (S) par rapport au repère R s'écrit :

$$\{\mathcal{V}(S/R)\} = \begin{Bmatrix} \vec{\Omega}(S/R) \\ \vec{V}(A/R) \end{Bmatrix}$$

Le point A étant lié au solide S.

La vitesse d'un autre point B lié au solide (S) se calcule à partir de la vitesse du point A par la relation :

$$\vec{V}(B/R) = \vec{V}(A/R) + \vec{\Omega}(S/R) \wedge \vec{AB}$$

Ce torseur cinématique possède un axe central appelé axe de viration du mouvement de (S) par rapport à R.

Un mouvement de translation se représente par un couple et un mouvement de rotation se représente par un torseur à résultante.

Le champ des vecteurs vitesse d'un solide équiprojectif, c'est-à-dire que :

$$\forall A \text{ et } B \in (S) : \vec{AB} \cdot \vec{V}(A/R) = \vec{AB} \cdot \vec{V}(B/R)$$

2. Entre les vecteurs accélération de 2 points A et B du solide (S) existe la relation :

$$\vec{\Gamma}(B/R) = \vec{\Gamma}(A/R) + \left[\frac{d}{dt} \vec{\Omega}(S/R) \right]_R \wedge \vec{AB} + \vec{\Omega}(S/R) \wedge [\vec{\Omega}(S/R) \wedge \vec{AB}]$$

Le champ des accélérations des points d'un solide n'est pas représentable par un torseur.

PROBLÈME RÉSOLU

Soit $R(O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ un repère lié à un bâti (S_0) (figure 12). Une tige (S), de longueur l , d'extrémité A et B, d'épaisseur négligeable, a une liaison linéique annulaire de centre A, d'axe ($O, \vec{x}$) avec (S_0) et une autre liaison linéique annulaire de centre B, d'axe ($O, \vec{y}$) avec (S_0). Soit $R_1(A, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$ un repère lié à la tige (S) tel que $\vec{AB} = l\vec{y}_1$, on pose $\alpha = (\vec{x}, \vec{x}_1)$.

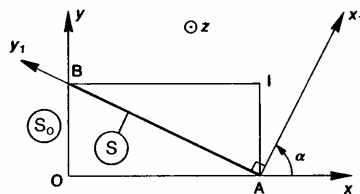


Fig. 12

QUESTION 1

Déterminer $\{\mathcal{V}(S/R)\}$ au point A.

RÉPONSE

Ce torseur est constitué des deux vecteurs suivants :

$$\{\mathcal{V}(S/R)\} = \begin{Bmatrix} \vec{\Omega}(S/R) \\ \vec{V}(A/R) \end{Bmatrix}$$

avec

$$\vec{\Omega}(S/R) = \alpha' \vec{z}$$

$$\text{et } \vec{V}(A/R) = \left[\frac{d}{dt} \vec{OA} \right]_R = \left[\frac{d}{dt} l \sin \alpha \vec{x} \right]_R = l \alpha' \cos \alpha \vec{x}$$

donc

$$\{\mathcal{V}(S/R)\} = \begin{Bmatrix} \alpha' \vec{z} \\ l \alpha' \cos \alpha \vec{x} \end{Bmatrix}$$

QUESTION 2

Déterminer le moment central et l'axe central de ce torseur.

RÉPONSE

Les deux éléments de réduction du torseur sont perpendiculaires, par conséquent ce torseur est à résultante et par suite son moment central est nul.

L'axe central Δ a même direction que la résultante générale du torseur, soit $\vec{z}$.

Notons I l'intersection de Δ avec le plan ($O, \vec{x}, \vec{y}$).

Le moment central étant nul :

$$\vec{V}(I \in S/R) = \vec{0}.$$

Connaissant le torseur au point A, la position du point I est donnée par la relation (paragraphe 1.2.1)

$$\vec{AI} = \frac{\alpha' \vec{z} \wedge l \alpha' \cos \alpha \vec{x}}{(\alpha' \vec{z})^2}$$

$$\vec{AI} = l \cos \alpha \vec{y}.$$

Ce point I est le quatrième sommet du rectangle BOAI.

REMARQUE

Le point I est appelé centre instantané de rotation du mouvement du plan ($A, \vec{x}_1, \vec{y}_1$) par rapport au plan ($O, \vec{x}, \vec{y}$).

QUESTION 3

Déterminer les axoïdes du mouvement de (S) par rapport à R.

RÉPONSE

Les axoïdes sont les surfaces engendrées par Δ dans (S) et dans R. Comme Δ a même direction que $\vec{z}$ les axoïdes sont des cylindres de génératrices parallèles à $\vec{z}$. Ces axoïdes seront donc déterminées par leur section droite avec les plans $(O, \vec{x}, \vec{y})$ et $(A, \vec{x}_1, \vec{y}_1)$.

Ce qui revient à chercher les lieux de I dans R et R₁.

Lieu de I dans R (base du mouvement). Remarquons que $OI = l$ (figure 12), par suite le lieu de I dans R est le cercle de centre O de rayon l .

Lieu de I dans R₁ (roulante du mouvement). Remarquons que l'angle $\widehat{AIB}$ est droit, par suite le lieu de I dans R₁ est le cercle de diamètre AB.

QUESTION 4

Calculer $\vec{V}(B/R)$ de deux façons :

- en dérivant le vecteur position $\vec{OB}$,
- à partir de $\vec{V}(A/R)$.

RÉPONSE

$$a) \vec{V}(B/R) = \left[\frac{d}{dt} \vec{OB} \right]_R = \left[\frac{d}{dt} l \cos \alpha \vec{y} \right]_R$$

$$\vec{V}(B/R) = -l\alpha' \sin \alpha \vec{y}.$$

$$b) \vec{V}(B/R) = \vec{V}(A/R) + \vec{\Omega}(S/R) \wedge \vec{AB} \\ = l\alpha' \cos \alpha \vec{x} + \alpha' \vec{z} \wedge l\vec{y}_1 \\ = l\alpha' \cos \alpha \vec{x} - l\alpha' \vec{x}_1$$

sachant que $\vec{x}_1 = \cos \alpha \vec{x} + \sin \alpha \vec{y}$

$$\vec{V}(B/R) = l\alpha' \cos \alpha \vec{x} - l\alpha' (\cos \alpha \vec{x} + \sin \alpha \vec{y}),$$

$$\text{soit } \vec{V}(B/R) = -l\alpha' \sin \alpha \vec{y}.$$

REMARQUE

La trajectoire du point B étant connue la première méthode de calcul est préférable.

QUESTION 5

Calculer le vecteur vitesse du point O, supposé lié à (S) à l'instant considéré, par rapport au repère R : $\vec{V}(O \in S/R)$.

RÉPONSE

La méthode pour calculer $\vec{V}(O \in S/R)$ est de passer par l'intermédiaire d'un point qui appartient sans ambiguïté au solide (S), par exemple le point A. Autrement dit d'appliquer aux points

O et A la relation entre les vecteurs vitesse de deux points d'un solide.

$$\vec{V}(O \in S/R) = \vec{V}(A/R) + \vec{\Omega}(S/R) \wedge \vec{AO} \\ = l\alpha' \cos \alpha \vec{x} + \alpha' \vec{z} \wedge l \sin \alpha \vec{x}$$

avec $\vec{z} \wedge \vec{x} = \vec{y}$, on obtient

$$\vec{V}(O \in S/R) = l\alpha' \cos \alpha \vec{x} - l\alpha' \sin \alpha \vec{y}$$

soit

$$\vec{V}(O \in S/R) = l\alpha' (\cos \alpha \vec{x} - \sin \alpha \vec{y}).$$

QUESTION 6

- Calculer le vecteur accélération $\vec{\Gamma}(A/R)$ en dérivant le vecteur vitesse $\vec{V}(A/R)$.
- Calculer le vecteur accélération $\vec{\Gamma}(B/R)$ en dérivant le vecteur vitesse $\vec{V}(B/R)$.
- Retrouver l'expression de $\vec{\Gamma}(B/R)$ à partir de $\vec{\Gamma}(A/R)$ en utilisant la relation 4 du paragraphe 2.

RÉPONSE

$$a) \vec{\Gamma}(A/R) = \left[\frac{d}{dt} \vec{V}(A/R) \right]_R = \left[\frac{d}{dt} l\alpha' \cos \alpha \vec{x} \right]_R$$

$\vec{x}$ étant constant dans R :

$$\vec{\Gamma}(A/R) = l(\alpha'' \cos \alpha - \alpha'^2 \sin \alpha) \vec{x}.$$

$$b) \vec{\Gamma}(B/R) = \left[\frac{d}{dt} \vec{V}(B/R) \right]_R \\ = \left[\frac{d}{dt} (-l\alpha' \sin \alpha \vec{y}) \right]_R$$

$\vec{y}$ étant constant dans R :

$$\vec{\Gamma}(B/R) = -l(\alpha'' \sin \alpha + \alpha'^2 \cos \alpha) \vec{y}.$$

c) Utilisons la relation (4) du paragraphe 2 entre les points A et B :

$$\vec{\Gamma}(B/R) = \vec{\Gamma}(A/R) + \left[\frac{d}{dt} \vec{\Omega}(S/R) \right]_R \wedge \vec{AB} \\ + \vec{\Omega}(S/R) \wedge [\vec{\Omega}(S/R) \wedge \vec{AB}]$$

soit en remplaçant :

$$\vec{\Gamma}(B/R) = l(\alpha'' \cos \alpha - \alpha'^2 \sin \alpha) \vec{x} + \alpha'' \vec{z} \wedge l\vec{y}_1 \\ + \alpha' \vec{z} \wedge (\alpha' \vec{z} \wedge l\vec{y}_1)$$

en effectuant les produits vectoriels :

$$\vec{\Gamma}(B/R) = l(\alpha'' \cos \alpha - \alpha'^2 \sin \alpha) \vec{x} - l\alpha'' \vec{x}_1 - l\alpha'^2 \vec{y}_1$$

et en notant que :

$$\begin{cases} \vec{x}_1 = \cos \alpha \vec{x} + \sin \alpha \vec{y} \\ \vec{y}_1 = -\sin \alpha \vec{x} + \cos \alpha \vec{y} \end{cases}$$

on obtient :

$$\vec{\Gamma}(B/R) = -l(\alpha'' \sin \alpha + \alpha'^2 \cos \alpha) \vec{y}.$$

QUESTION 7

Calculer le vecteur accélération du point O, supposé lié à (S) à l'instant considéré, par rapport au repère R : $\vec{\Gamma}(O \in S/R)$.

RÉPONSE

Comme pour calculer $\vec{V}(O \in S/R)$, on calcule $\vec{\Gamma}(O \in S/R)$ en passant par l'intermédiaire du vecteur accélération connu d'un autre point du solide (S), par exemple le point A.

$$\vec{\Gamma}(O \in S/R) = \vec{\Gamma}(A/R) + \left[\frac{d}{dt} \vec{\Omega}(S/R) \right]_R \wedge \vec{AO} + \vec{\Omega}(S/R) \wedge [\vec{\Omega}(S/R) \wedge \vec{AO}]$$

soit en remplaçant

$$\vec{\Gamma}(O \in S/R) = l(\alpha'' \cos \alpha - \alpha'^2 \sin \alpha) \vec{x} + \alpha'' \vec{z} \wedge -l \sin \alpha \vec{x} + \alpha' \vec{z} \wedge (\alpha' \vec{z} \wedge -l \sin \alpha \vec{x})$$

en effectuant les produits vectoriels :

$$\vec{\Gamma}(O \in S/R) = l(\alpha'' \cos \alpha - \alpha'^2 \sin \alpha) \vec{x} - l\alpha'' \sin \alpha \vec{y} + l\alpha'^2 \sin \alpha \vec{x}$$

soit

$$\vec{\Gamma}(O \in S/R) = l\alpha''(\cos \alpha \vec{x} - \sin \alpha \vec{y}).$$

REMARQUE

— Pour calculer $\vec{V}(O \in S/R)$ surtout ne pas dériver le vecteur position du point O dans le repère R. Cette opération n'a jamais été définie et de plus elle donne un résultat faux. En effet, le vecteur position du point O dans le repère R est le vecteur nul, et en appliquant les règles de dérivation habituelles, qui ignorent que le point O appartient au solide (S) à l'instant considéré, on trouverait un vecteur vitesse nul.

— Pour calculer $\vec{\Gamma}(O \in S/R)$ surtout ne pas dériver $\vec{V}(O \in S/R)$, pour les mêmes raisons que précédemment.

CONSEILS POUR LA RÉOLUTION

— La relation $\vec{V}(B/R) = \vec{V}(A/R) + \vec{\Omega}(S/R) \wedge \vec{AB}$ ne s'applique qu'entre deux points A et B liés au solide (S) à l'instant considéré.

— Soit P un point en mouvement par rapport au solide (S). Pour calculer, à un instant donné, $\vec{V}(P \in S/R)$ passer par l'intermédiaire d'un point appartenant effectivement au solide (S), par exemple A, pour écrire la relation :

$$\vec{V}(P \in S/R) = \vec{V}(A/R) + \vec{\Omega}(S/R) \wedge \vec{AP}.$$

Surtout ne pas dériver le vecteur position du point P dans le repère R.

— Pour calculer $\vec{\Gamma}(P \in S/R)$ procéder de la même façon. Surtout ne pas dériver $\vec{V}(P \in S/R)$.

— Pour appliquer graphiquement le théorème de l'équiprojectivité du champ des vitesses d'un solide faire attention de bien porter les projections des vecteurs vitesse du même côté des points considérés.

De plus, ce théorème ne s'applique qu'entre deux points d'un solide.

EXERCICES AVEC RÉPONSES

1 — Le dispositif représenté figure 13 est une partie du mécanisme de prise de passes automatiques d'une machine à fileter.

La rotation de la came (1) autour de l'axe (O, $\vec{x}$) provoque la rotation autour de l'axe (A, $\vec{z}$) du levier (3) qui entraîne la biellette (4), donc la rotation autour de l'axe (E, $\vec{z}$) de la pièce (5). Par l'intermédiaire du cliquet (6), (5) engendre la rotation de la roue à rochet (7) et du pignon (8) autour de (K, $\vec{z}$).

L'engrenage (8) - (9) provoque la rotation de l'excentrique (10) autour de (M, $\vec{z}$) qui permet le déplacement d'une butée (non représentée sur la figure) en contact avec (10) au point N.

Le but de l'étude est de déterminer, dans la configuration proposée, le vecteur vitesse du point N de l'excentrique par rapport au bâti : $\vec{V}(N \in 10/0)$, con-

naissant le vecteur vitesse du point C de la came par rapport au bâti : $\vec{V}(C \in 1/0)$, représenté sur la figure. En supposant que le galet (2) roule sans glisser sur la came (1), on admettra que :

$$\vec{V}(C \in 1/0) = \vec{V}(C \in 2/0).$$

QUESTIONS

1° Déterminer graphiquement le vecteur vitesse :

$\vec{V}(H \in 7/0)$; sachant que

$$\|\vec{V}(C \in 1/0)\| = 1100 \text{ mm/s}.$$

2° Déterminer $\vec{\Omega}(7/0)$ et $\vec{\Omega}(10/0)$. Pour cela, on admettra que :

$$\vec{V}(H \in 7/0) = -50\vec{x} + 400\vec{y}.$$

3° En déduire la norme du vecteur vitesse $\vec{V}(N \in 10/0)$.

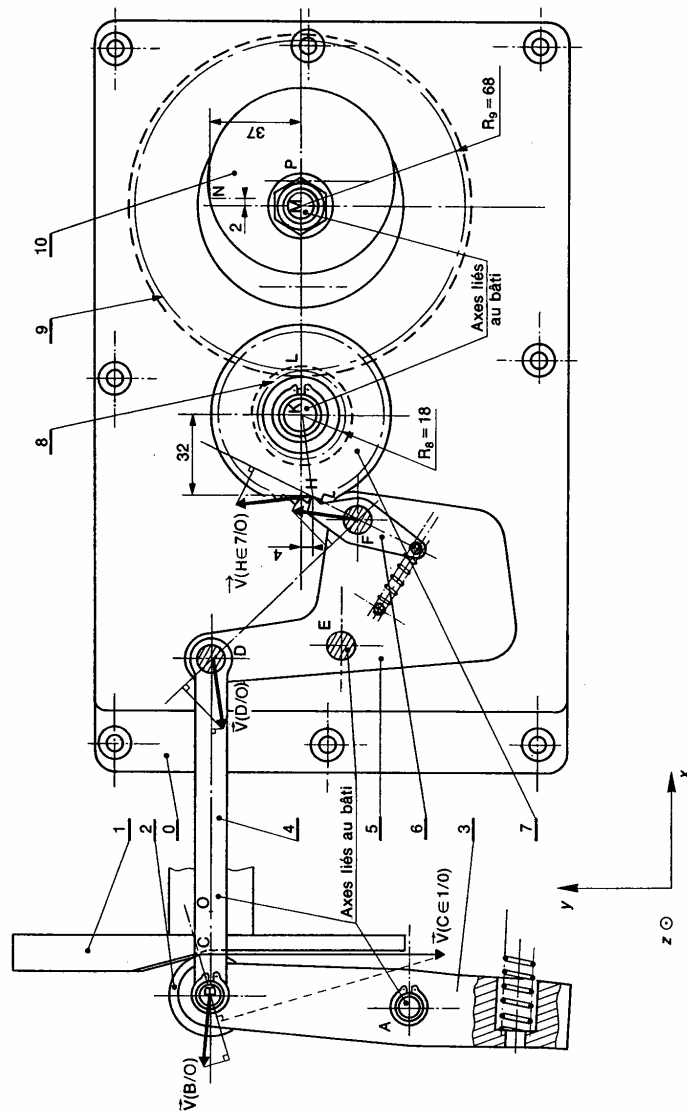


Fig. 13

RÉPONSES

1° En appliquant le théorème de l'équiprojectivité du champ des vecteurs vitesse des points d'un solide successivement entre les points C et B de (3), B et D de (4), D et F de (5), F et H de (6) on détermine $\vec{V}(H \in 7/0)$. On trouve que

$$\|\vec{V}(H \in 7/0)\| \approx 400 \text{ mm/s.}$$

2° $\vec{\Omega}(7/0) = -12,5\vec{z}$ et $\vec{\Omega}(10/0) = 3,46\vec{z}$.

3° $\vec{V}(N \in 10/0) = -128,02\vec{x} + 6,92\vec{y}$

et $\|\vec{V}(N \in 10/0)\| = 128,21 \text{ mm/s.}$

2 — Le dispositif représenté figure 14 permet de centrer entre pointes des troncs d'arbres pour les dérouler en feuilles minces sur une machine analogue à un tour. Ces feuilles seront ensuite collées entre-elles pour obtenir du contre-plaqué multiplis.

Le vérin (V) articulé sur le bâti (0) en N et sur la pince (2) en A, permet par l'intermédiaire des biellettes (4) et (5) d'entraîner en rotation par rapport au bâti les pinces (1) autour de (F, $\vec{z}$), (2) autour de (D, $\vec{z}$) et (3) autour de (K, $\vec{z}$).

Le but de l'étude est de déterminer les vecteurs vitesse par rapport au bâti des points des pièces (1), (2) et (3) en contact avec le tronc d'arbre.

QUESTIONS

1° Connaissant le vecteur vitesse du point A par rapport au bâti : $\vec{V}(A/0)$, déterminer graphiquement le vecteur vitesse des points de contact R, T, S des pinces 1, 2 et 3 avec le tronc d'arbre : $\vec{V}(R \in 1/0)$, $\vec{V}(S \in 2/0)$ et $\vec{V}(T \in 3/0)$.

2° Expliquer pourquoi ces vecteurs vitesse sont de même norme.

RÉPONSES

1° Voir figure 14.

— D est le centre de rotation de la pince (2) par rapport au bâti : $\vec{V}(S \in 2/0)$ est directement déterminé à partir de $\vec{V}(A/0)$.

— Après avoir déterminé $\vec{V}(C/0)$, appliquons le théorème de l'équiprojectivité du champ des vecteurs vitesse des points d'un solide entre les points C et G de (4), pour tracer $\vec{V}(G/0)$. F est le centre de rotation de la pince (1) par rapport au bâti ; $\vec{V}(R \in 1/0)$ est directement déterminé à partir de $\vec{V}(G/0)$.

— Après avoir déterminé $\vec{V}(E/0)$, appliquons le théorème de l'équiprojectivité entre les points E et H de (5) pour tracer $\vec{V}(H/0)$. K est le centre de rotation de la pince (3) par rapport au bâti. $\vec{V}(T \in 3/0)$ est directement déterminé à partir de $\vec{V}(H/0)$.

2° Ces vecteurs vitesse sont de même norme car les parallélogrammes HEDK et CGFD sont identiques ; les points R et S sont disposés de la même façon par rapport à GF et ED, ainsi que les points S et T par rapport à CD et HK. Cette condition est nécessaire pour éviter de mater le bois lors du serrage.

3 — La figure 15 représente un pendule double constitué de deux tiges OA et AB.

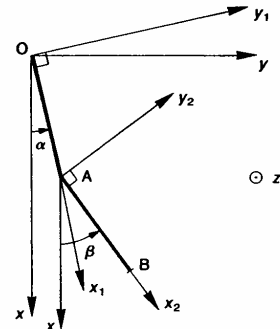


Fig. 15

La tige OA est en liaison pivot d'axe (O, $\vec{z}$) avec le bâti. La tige AB est en liaison pivot d'axe (A, $\vec{z}$) avec la tige OA.

Soient trois repères : $R(O, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z})$ lié au bâti $R_1(O, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z})$ lié à la tige OA et $R_2(A, \vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z})$ lié à la tige AB, tels que :

$$\vec{OA} = a\vec{x}_1 \quad (a > 0)$$

$$\vec{AB} = b\vec{x}_2 \quad (b > 0)$$

$$\alpha = (\vec{x}_1, \vec{z}_1)$$

$$\beta = (\vec{x}_2, \vec{z}_2).$$

QUESTIONS

Déterminer :

1° Le vecteur vitesse du point B par rapport au repère R : $\vec{V}(B/R)$.

2° Le vecteur vitesse du point B par rapport au repère R_1 : $\vec{V}(B/R_1)$.

3° Le vecteur vitesse du point B appartenant au repère R_1 par rapport au repère R : $\vec{V}(B \in R_1/R)$.

4° Le vecteur accélération du point B par rapport au repère R : $\vec{\Gamma}(B/R)$.

5° Le vecteur accélération du point B par rapport au repère R_1 : $\vec{\Gamma}(B/R_1)$.

6° Le vecteur accélération du point B appartenant au repère R_1 par rapport au repère R :

$$\vec{\Gamma}(B \in R_1/R).$$

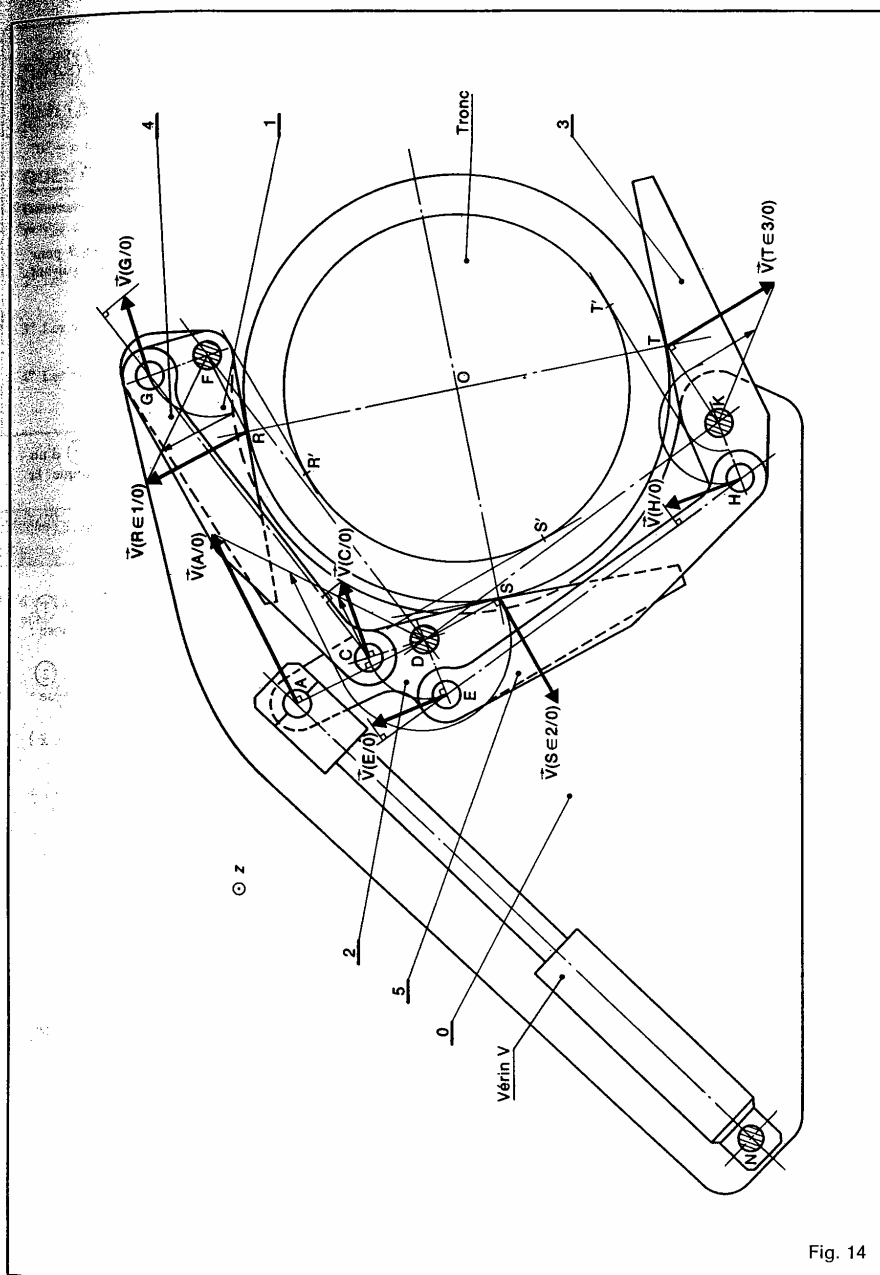


Fig. 14

RÉPONSES

$$1^{\circ} \vec{V}(B/R) = a\alpha' \vec{y}_1 + b\beta' \vec{y}_2.$$

$$2^{\circ} \vec{V}(B/R_1) = b(\beta' - \alpha') \vec{y}_2.$$

$$3^{\circ} \vec{V}(B \in R_1/R) = a\alpha' \vec{y}_1 + b\alpha' \vec{y}_2.$$

$$4^{\circ} \vec{F}(B/R) = a\alpha'' \vec{y}_1 - a\alpha'^2 \vec{x}_1 + b\beta'' \vec{y}_2 - b\beta'^2 \vec{x}_2.$$

$$5^{\circ} \vec{F}(B/R_1) = b(\beta'' - \alpha'') \vec{y}_2 - b(\beta' - \alpha')^2 \vec{x}_2.$$

$$6^{\circ} \vec{F}(B \in R_1/R) = a\alpha'' \vec{y}_1 - a\alpha'^2 \vec{x}_1 + b\alpha'' \vec{y}_2 - b\alpha'^2 \vec{x}_2.$$

4 — Le manipulateur schématisé figure 16 est constitué :

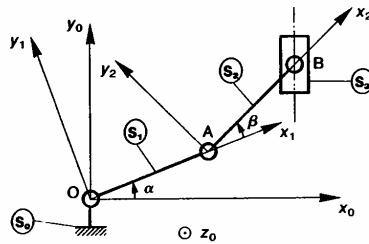


Fig. 16

— d'un bâti (S_0) auquel est lié le repère $R(O, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$,
 — d'un bras (S_1) en liaison pivot d'axe ($O, \vec{z}_0$) avec le bâti. $R_1(O, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$ est un repère lié à (S_1), on pose $\alpha = (\vec{x}_0, \vec{x}_1)$,

— d'un bras (S_2) en liaison pivot d'axe ($A, \vec{z}_1$) avec le bras (S_1). $R_2(A, \vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_2)$ est un repère lié à (S_2) tel que $\vec{OA} = a\vec{x}_1$, on pose $\beta = (\vec{x}_1, \vec{x}_2)$,

— d'une tête (S_3) en liaison pivot d'axe ($B, \vec{z}_2$) avec le bras (S_2) telle que $\vec{AB} = b\vec{x}_2$.

Le manipulateur est immobilisé dans la position $\alpha = 30^\circ$ et $\beta = 20^\circ$. On donne $a = 300$ mm et $b = 400$ mm

QUESTION

De quelles valeurs doivent varier les angles α et β pour que le centre B de la tête se déplace de -3 mm suivant $\vec{x}_0$ et de $+1$ mm suivant $\vec{y}_0$?

RÉPONSES

$$d\alpha = -0,65^\circ.$$

$$d\beta = 1,52^\circ.$$

5 — Soit $R(O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ un repère lié au bâti (0) d'un régulateur à boules schématisé comme l'indique : figure 17.

Le corps (1) a une liaison pivot d'axe ($O, \vec{x}$) avec (0). Soit $R_1(O, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$ un repère lié à (1).

On pose : $\alpha(t) = (\vec{y}, \vec{y}_1)$.

Le levier (2) a une liaison pivot d'axe ($A, \vec{z}_1$) avec (1).

Soit $R_2(A, \vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_2)$ un repère lié à (2). On pose $\vec{OA} = r\vec{y}_1$ ($r > 0$) et $\beta(t) = (\vec{x}_1, \vec{x}_2)$.

Le levier (3) a une liaison pivot d'axe ($B, \vec{z}_2$) avec (2).

Soit $R_3(B, \vec{x}_3, \vec{y}_3, \vec{z}_3)$ un repère lié à (3). On pose $\vec{AB} = l\vec{x}_2$ ($l > 0$).

La pièce (4) a une liaison pivot glissant d'axe ($O, \vec{x}$)

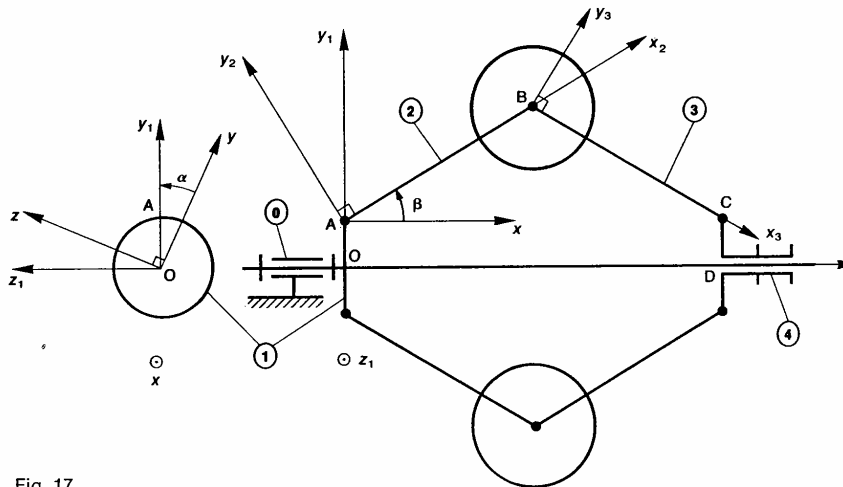


Fig. 17

avec (0). Soit $R_4(D, \vec{x}, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$ un repère lié à (4). Le point D est situé sur l'axe $(O, \vec{x})$. La pièce (4) a une liaison pivot d'axe $(C, \vec{z}_1)$ avec (3). On pose : $\overline{DC} = r\vec{y}_1$ et $\overline{BC} = l\vec{x}_3$.

QUESTIONS

Déterminer :

1° Les vecteurs rotation :

$$\vec{\Omega}(1/0), \vec{\Omega}(2/0), \vec{\Omega}(3/0), \vec{\Omega}(3/2).$$

2° Les vecteurs vitesse du point B :

$$\vec{V}(B/1), \vec{V}(B \in 1/0), \vec{V}(B/0).$$

3° Les vecteurs vitesse du point C :

$$\vec{V}(C/2), \vec{V}(C \in 2/0), \vec{V}(C/0).$$

4° Les vecteurs accélération du point B :

$$\vec{\Gamma}(B/1), \vec{\Gamma}(B \in 1/0), \vec{\Gamma}(B/0).$$

RÉPONSES

$$1^\circ \vec{\Omega}(1/0) = \alpha' \vec{x}$$

$$\vec{\Omega}(2/0) = \alpha' \vec{x} + \beta' \vec{z}_1$$

$$\vec{\Omega}(3/0) = \alpha' \vec{x} - \beta' \vec{z}_1$$

$$\vec{\Omega}(3/2) = -2\beta' \vec{z}_1.$$

$$2^\circ \vec{V}(B/1) = l\beta' \vec{y}_2$$

$$\vec{V}(B \in 1/0) = \alpha'(r + l \sin \beta) \vec{z}_1$$

$$\vec{V}(B/0) = l\beta' \vec{y}_2 + \alpha'(r + l \sin \beta) \vec{z}_1.$$

$$3^\circ \vec{V}(C/2) = -2l\beta' \vec{y}_3$$

$$\vec{V}(C \in 2/0) = r\alpha' \vec{z}_1 + l\beta'(\vec{y}_2 + \vec{y}_3)$$

$$\vec{V}(C/0) = r\alpha' \vec{z}_1 - 2l\beta' \sin \beta \vec{x}.$$

$$4^\circ \vec{\Gamma}(B/1) = l\beta'' \vec{y}_2 - l\beta'^2 \vec{x}_2$$

$$\vec{\Gamma}(B \in 1/0) = (r + l \sin \beta)(\alpha'' \vec{z}_1 - \alpha'^2 \vec{y}_1)$$

$$\vec{\Gamma}(B/0) = l\beta'' \vec{y}_2 - l\beta'^2 \vec{x}_2 + (r + l \sin \beta)(\alpha'' \vec{z}_1 - \alpha'^2 \vec{y}_1) + 2l\alpha'\beta' \cos \beta \vec{z}_1.$$

EXERCICES SANS RÉPONSE

6 — Le mécanisme du releveur de fil d'une piqueuse plate est constitué comme l'indique la figure 18.

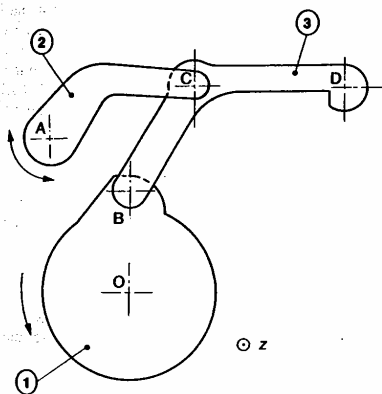


Fig. 18

Le plateau moteur (1) et le levier du releveur de fil (2) ont une liaison pivot, respectivement d'axe $(O, \vec{z})$ et $(A, \vec{z})$, avec le bâti (0) de la machine.

Le releveur de fil (3) est articulé avec (1) et (2) par l'intermédiaire de deux liaisons pivot, respectivement d'axe $(B, \vec{z})$ et $(C, \vec{z})$.

Le fil passe par le trou centré au point D.

QUESTION

Connaissant le vecteur vitesse du point B par rapport au bâti (0), déterminer graphiquement, dans la configuration proposée, le vecteur vitesse du point D par rapport au bâti (0).

7 — La figure 19 représente une pompe à eau à trois bielles. Le mouvement est donné par un moteur électrique tournant à 36 tr/min dans le sens trigonométrique.

Sur l'arbre moteur est fixé une roue dentée (1) qui engrène avec un pignon (2). La manivelle (3) est solidaire du pignon (2). Les liaisons aux points D et E sont des liaisons rotule : E est un point fixe du bâti (0). En F les trois bielles (4), (5) et 7 sont articulées autour de l'axe 6.

La bielle (7) entraîne le piston (8) qui se déplace dans le cylindre (0).

On donne : $OA = 55 \text{ mm}$, $AB = 33 \text{ mm}$, $BC = 11 \text{ mm}$, $CD = 50 \text{ mm}$, $OE = 87 \text{ mm}$, $DF = EF = FG = 100 \text{ mm}$, $\alpha = 35^\circ$.

QUESTION

Déterminer graphiquement à l'instant de la configuration de la figure ($\alpha = 35^\circ$), la vitesse de translation du piston (8) par rapport au bâti (0).

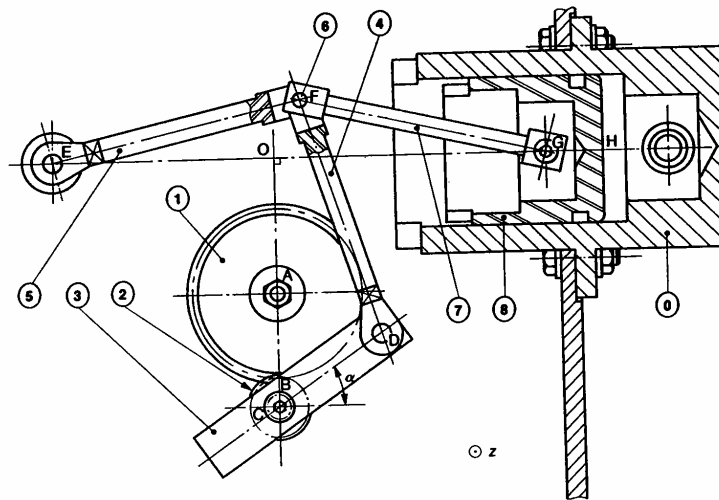


Fig. 19

8 — Soit $R(O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ un repère lié au bâti (0) d'une petite machine à cambrer une série de pièces (figure 20).

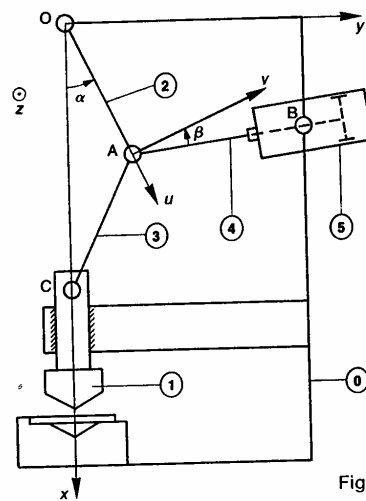


Fig. 20

Le poinçon (1) a une liaison glissière d'axe $(O, \vec{x})$ avec le bâti (0). Sa translation est assurée par un système genouillère constitué d'une bielle (2) articulée en avec le bâti, et d'une bielle (3) articulée en C avec poinçon. La tige (4) d'un vérin pneumatique, dont corps (5) a une liaison pivot d'axe $(B, \vec{z})$ avec le bâti agit sur le point d'articulation A des deux bielles (2) et (3).

Données géométriques :

$$OA = AC = l = 100 \text{ mm};$$

$$\vec{OB} = h\vec{x} + d\vec{y}, \text{ avec } h = 90 \text{ mm}, d = 150 \text{ mm}$$

Soit $\vec{u}$ le vecteur unitaire tel que $\vec{OA} = l\vec{u}$ et $\vec{v}$ le vecteur unitaire directement perpendiculaire à $\vec{u}$.

$$\text{On pose : } \begin{cases} \alpha = (\vec{x}, \vec{u}) \\ \beta = (\vec{AB}, \vec{v}) \end{cases}$$

Le système étant immobilisé dans la position $\alpha =$ la tige sort du corps du vérin d'une longueur $\lambda = 5 \text{ n}$

QUESTIONS

1° Déterminer la relation entre λ et le petit déplacement du point A (on négligera les infiniments petits deuxième ordre).

2° Calculer $\cos \beta$ en fonction de h, d, l , et α . En déduire la valeur numérique de la variation angulaire $d\alpha$ l'angle α .

3° Déterminer le petit déplacement du poinçon rapport au bâti.

4 composition des mouvements

Dans le calcul du vecteur vitesse ou du vecteur accélération d'un point d'un solide par rapport à un repère il est souvent plus facile de passer par l'intermédiaire d'autres repères. Le but de ce chapitre est donc d'établir les relations qui existent entre les différents mouvements de repères les uns par rapport aux autres.

1 COMPOSITION DES VECTEURS VITESSE

Soit un solide (S) en mouvement par rapport à deux repères $R(O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ et $R_0(O_0, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$ eux-mêmes en mouvement l'un par rapport à l'autre. Soit P un point du solide (S). Cherchons la relation entre $\vec{V}(P/R_0)$ et $\vec{V}(P/R)$. Pour cela calculons $\vec{V}(P/R_0)$. Par définition :

$$\vec{V}(P/R_0) = \left[\frac{d}{dt} \vec{O_0P} \right]_{R_0}$$

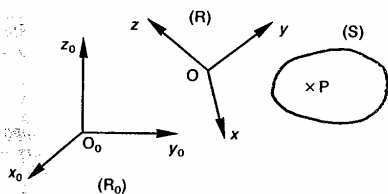


Fig. 1

En écrivant que $\vec{O_0P} = \vec{O_0O} + \vec{OP}$

$$\vec{V}(P/R_0) = \left[\frac{d}{dt} \vec{O_0O} \right]_{R_0} + \left[\frac{d}{dt} \vec{OP} \right]_{R_0}$$

En remarquant que : $\left[\frac{d}{dt} \vec{O_0O} \right]_{R_0} = \vec{V}(O/R_0)$ et en utilisant la relation de dérivation mise en évidence au chapitre 2 (relation 6 paragraphe 5.2)

$$\left[\frac{d}{dt} \vec{OP} \right]_{R_0} = \left[\frac{d}{dt} \vec{OP} \right]_R + \vec{\Omega}(R/R_0) \wedge \vec{OP}$$

$\vec{V}(P/R_0)$ s'écrit :

$$\vec{V}(P/R_0) = \vec{V}(O/R_0) + \left[\frac{d}{dt} \vec{OP} \right]_R + \vec{\Omega}(R/R_0) \wedge \vec{OP}$$

soit en remarquant que $\vec{V}(P/R) = \left[\frac{d}{dt} \vec{OP} \right]_R$:

$$\vec{V}(P/R_0) = \vec{V}(P/R) + \vec{V}(O/R_0) + \vec{\Omega}(R/R_0) \wedge \vec{OP} \quad (1)$$

Si on suppose le point P lié à R, $\vec{V}(P/R)$ est nul et la relation précédente s'écrit :

$$\vec{V}(P \in R/R_0) = \vec{V}(O/R_0) + \vec{\Omega}(R/R_0) \wedge \vec{OP}$$

qui est la relation entre les vecteurs vitesse de deux points O et P d'un solide lié à R.

Alors la relation (1) ci-dessus peut s'écrire :

$$\vec{V}(P/R_0) = \vec{V}(P/R) + \vec{V}(P \in R/R_0) \quad (2)$$

Définitions

- $\vec{V}(P/R_0)$ est appelé *vecteur vitesse absolue*.
- $\vec{V}(P/R)$ est appelé *vecteur vitesse relative*.
- $\vec{V}(P \in R/R_0)$ est appelé *vecteur vitesse d'entraînement*.

REMARQUE

Si le point P n'appartient pas au solide (S), cette relation doit s'écrire :

$$\vec{V}(P \in S/R_0) = \vec{V}(P \in S/R) + \vec{V}(P \in R/R_0) \quad (3)$$

Application

Considérons le mécanisme plan d'entraînement d'une pompe à main représenté figure 2.

Soit $R(O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ un repère lié à un bâti (S_0).

Le levier (S_1) a une liaison pivot d'axe ($O_1, \vec{z}$) avec (S_0).

Soit $R_1(O_1, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z})$ un repère lié à (S_1). L'axe ($O_1, \vec{y}_1$) est dirigé suivant l'axe du levier.

La tige (S_2) a une liaison glissière d'axe ($O, \vec{x}$) avec (S_0) et le centre A d'un maneton lié à (S_2), situé sur ($O, \vec{x}$), décrit l'axe ($O_1, \vec{y}_1$) lié à (S_1).

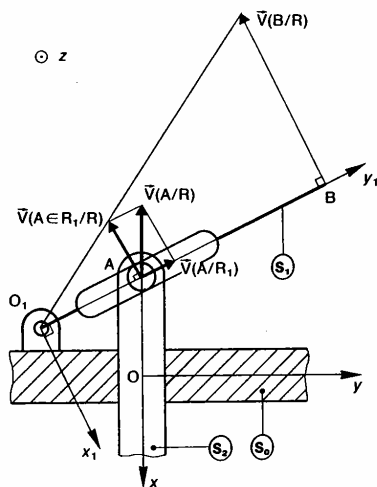


Fig. 2

QUESTION

Connaissant le vecteur vitesse de translation de la tige (S_2) par rapport au repère R , déterminer graphiquement le vecteur vitesse de l'extrémité B du levier (S_1) par rapport au repère R .

RÉPONSE

Appliquons au point A la relation (2) de composition des vecteurs vitesse entre les repères R et R_1 :

$$\vec{V}(A/R) = \vec{V}(A/R_1) + \vec{V}(A \in R_1/R).$$

$\vec{V}(A/R)$ est connu, il a même direction que le vecteur unitaire $\vec{x}$.

$\vec{V}(A/R_1)$ a pour direction O_1A .

$\vec{V}(A \in R_1/R)$ est le vecteur vitesse du point A , supposé lié à R_1 , par rapport à R . La liaison entre (S_1) et (S_0) étant une liaison pivot d'axe ($O_1, \vec{z}$), tout point lié à (S_1) décrit dans R un arc de cercle d'axe ($O_1, \vec{z}$).

Le vecteur vitesse $\vec{V}(A \in R_1/R)$ est donc perpendiculaire au rayon O_1A de la trajectoire du point A , supposé lié à R_1 .

D'où la construction de la figure 2 pour déterminer $\vec{V}(A \in R_1/R)$.

Le vecteur vitesse du point B par rapport à R : $\vec{V}(B/R)$ se déduit du vecteur vitesse $\vec{V}(A \in R_1/R)$ en remarquant que dans un mouvement de rotation les normes des vecteurs vitesse sont proportionnelles à la distance des points considérés à l'axe de rotation. D'où la construction graphique de $\vec{V}(B/R)$ utilisée figure 2.

2. VECTEUR VITESSE DE GLISSEMENT EN UN POINT ENTRE DEUX SOLIDES

Considérons deux solides (S_1) et (S_2) en contact ponctuel au point P . Soit (Π) le plan tangent commun en P à (S_1) et (S_2).

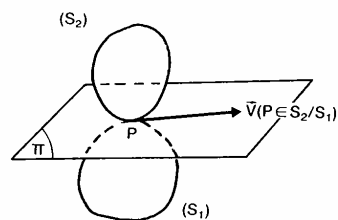


Fig. 3

Définition

Le vecteur vitesse de glissement au point P du solide (S_2) par rapport au solide (S_1) est le vecteur vitesse d'entraînement du point P dans le mouvement de (S_2) par rapport à (S_1), soit :

$$\vec{V}(P \in S_2/S_1).$$

Propriété

Le vecteur vitesse de glissement au point P du solide (S_2) par rapport au solide (S_1) est parallèle au plan tangent commun en P à (S_1) et (S_2).

Pour démontrer cette propriété appliquons en P la relation (2) de composition des vecteurs vitesse entre (S_1) et (S_2).

$$\vec{V}(P/S_1) = \vec{V}(P/S_2) + \vec{V}(P \in S_2/S_1)$$

soit :

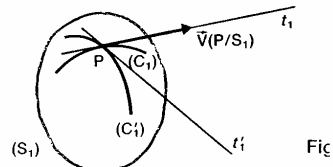
$$\vec{V}(P \in S_2/S_1) = \vec{V}(P/S_1) - \vec{V}(P/S_2).$$

REMARQUE

Lorsque deux solides (S_1) et (S_2) sont en contact en un point P il faut toujours distinguer en point, à un instant donné, trois points :

- un premier point lié à (S_1),
- un deuxième point lié à (S_2),
- et le point géométrique de contact, n'appartenant ni à (S_1) ni à (S_2), qui au cours du mouvement se déplace sur (S_1) et sur (S_2).

Soit (C_1) la trajectoire du point P sur la surface extérieure de (S_1) (figure 4). $\vec{V}(P/S_1)$ a même direction que la tangente Pt_1 à la courbe (C_1).



Or le plan tangent en P à (S_1) est défini par deux tangentes Pt_1 et Pt_1' à deux courbes (C_1 , (C_1'), de la surface extérieure de (S_1), concourant en P .

Par conséquent $\vec{V}(P/S_1)$ est parallèle à (Π) . De même pour $\vec{V}(P/S_2)$.

Par suite $\vec{V}(P \in S_2/S_1)$ est parallèle au plan tangent commun en P à (S_1) et (S_2) .

Définition

On dira que (S_2) roule sans glisser sur (S_1) si :

$$\vec{V}(P \in S_2/S_1) = \vec{0}.$$

Application

Considérons le mécanisme plan de commande d'une tige par un excentrique.

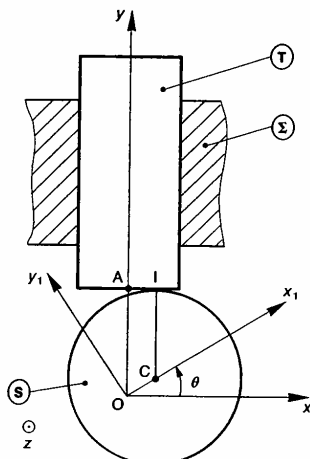


Fig. 5

Soit $R(O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ un repère lié au bâti (Σ) . L'excentrique (S) est assimilé à un disque de centre C, de rayon a . (S) a une liaison pivot d'axe $(O, \vec{z})$ avec (Σ) . Soit $R_1(O, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z})$ un repère lié à (S) tel que :

$$\vec{OC} = e\vec{x}_1 \quad (e > 0).$$

On pose :

$$\theta = (\vec{x}, \vec{x}_1).$$

La tige (T) a une liaison glissière d'axe $(O, \vec{y})$ avec (Σ) . (S) et (T) sont en contact ponctuel en un point I de la section droite extrême de la tige.

QUESTION

Déterminer le vecteur vitesse de glissement au point I du mouvement de (S) par rapport à (T) : $\vec{V}(I \in S/T)$.

RÉPONSE

Les mouvements de (S) et (T) étant connus par rapport à (Σ) , appliquons au point I la relation (3) de composition des vecteurs vitesse entre (S) , (T) et (Σ) ou R .

$$\vec{V}(I \in S/T) = \vec{V}(I \in S/R) + \vec{V}(I \in R/T)$$

soit en remarquant que

$$\vec{V}(I \in R/T) = -\vec{V}(I \in T/R)$$

$$\vec{V}(I \in S/T) = \vec{V}(I \in S/R) - \vec{V}(I \in T/R).$$

Pour calculer $\vec{V}(I \in S/R)$ passons par l'intermédiaire du point O :

$$\vec{V}(I \in S/R) = \vec{V}(O/R) + \vec{\Omega}(S/R) \wedge \vec{OI}$$

O étant l'origine du repère R : $\vec{V}(O/R) = \vec{0}$; d'autre part

$$\vec{OI} = \vec{OC} + \vec{CI},$$

soit

$$\vec{OI} = e\vec{x}_1 + a\vec{y}.$$

Par conséquent,

$$\vec{V}(I \in S/R) = \theta' \vec{z} \wedge (e\vec{x}_1 + a\vec{y}) = \theta' (e\vec{y}_1 - a\vec{x}).$$

La tige ayant un mouvement de translation rectiligne par rapport à (Σ) , tous les points de la tige ont même vecteur vitesse, à un instant donné, par rapport à R .

Donc

$$\vec{V}(I \in T/R) = \vec{V}(A/R).$$

A : point de la section droite extrême de la tige situé sur l'axe $(O, \vec{y})$.

$$\begin{aligned} \vec{V}(A/R) &= \left[\frac{d}{dt} \vec{OA} \right]_R \\ &= \left[\frac{d}{dt} (a + e \sin \theta) \vec{y} \right]_R \\ &= e\theta' \cos \theta \vec{y}. \end{aligned}$$

Par suite :

$$\vec{V}(I \in S/T) = \theta' (e\vec{y}_1 - a\vec{x}) - e\theta' \cos \theta \vec{y}.$$

En projetant sur $\vec{x}$ et $\vec{y}$ les vecteurs de la relation ci-dessus nous vérifions que le vecteur vitesse de glissement est bien parallèle au plan tangent commun en I à (S) et (T) .

$$\vec{V}(I \in S/T) = -\theta' (a + e \sin \theta) \vec{x}.$$

3. COMPOSITION DES VECTEURS ROTATION

Soit un solide (S) en mouvement par rapport à deux repères R et R_0 . Cherchons la relation qui existe entre les trois vecteurs rotation $\vec{\Omega}(S/R_0)$, $\vec{\Omega}(S/R)$ et $\vec{\Omega}(R/R_0)$.

Pour cela appliquons la relation de changement de base de dérivation, mise en évidence au chapitre 2 (relation 6, paragraphe 5.2), à un vecteur $\vec{U}$ quelconque. Nous pouvons écrire successivement :

$$\left[\frac{d\vec{U}}{dt} \right]_{R_0} = \left[\frac{d\vec{U}}{dt} \right]_R + \vec{\Omega}(R/R_0) \wedge \vec{U}$$

$$\left[\frac{d\vec{U}}{dt} \right]_R = \left[\frac{d\vec{U}}{dt} \right]_S + \vec{\Omega}(S/R) \wedge \vec{U}.$$

En ajoutant membre à membre ces deux égalités, il vient :

$$\left[\frac{d\vec{U}}{dt} \right]_{R_0} = \left[\frac{d\vec{U}}{dt} \right]_S + [\vec{\Omega}(S/R) + \vec{\Omega}(R/R_0)] \wedge \vec{U}$$

d'autre part, nous pouvons écrire directement entre (S) et R_0 :

$$\left[\frac{d\vec{U}}{dt} \right]_{R_0} = \left[\frac{d\vec{U}}{dt} \right]_{R_0} + \vec{\Omega}(S/R_0) \wedge \vec{U}.$$

En comparant ces deux expressions de $\left[\frac{d\vec{U}}{dt} \right]_{R_0}$ nous en déduisons la relation (4) de composition des vecteurs rotation :

$$\vec{\Omega}(S/R_0) = \vec{\Omega}(S/R) + \vec{\Omega}(R/R_0). \quad (4)$$

Application

Considérons le schéma cinématique d'un train épicycloïdal à axes parallèles constitué de cinq éléments (fig. 6) :

- deux arbres (S_1) et (S_2) coaxiaux,
- un satellite (S),
- un porte-satellite (PS),
- un bâti (S_0).

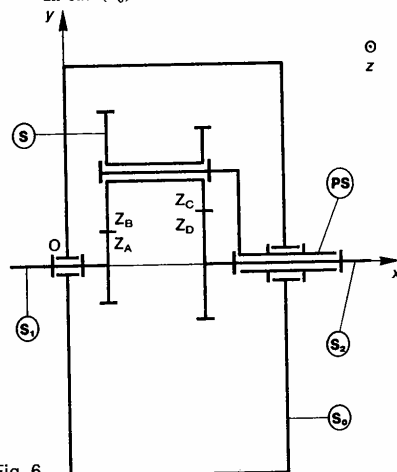


Fig. 6

Soit $R(O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ un repère lié à (S_0). L'axe ($O, \vec{x}$) est parallèle à l'axe des roues.

Posons :

$$\begin{cases} \vec{\Omega}(S_1/R) = \omega_1 \vec{x} \\ \vec{\Omega}(S_2/R) = \omega_2 \vec{x} \\ \vec{\Omega}(PS/R) = \omega \vec{x} \end{cases}$$

QUESTION

Déterminer la relation entre ω_1 , ω_2 et ω (relation de Willis).

RÉPONSE

Remarquons que pour un observateur lié au porte-satellite (PS) les axes géométriques de toutes les roues sont immobiles.

Or nous savons calculer, pour un tel observateur, une fois fixé un sens de parcours de la chaîne cinématique du train d'engrenages, le rapport entre la vitesse de rotation de l'arbre de sortie et la vitesse de rotation de l'arbre d'entrée.

Calculons $\vec{\Omega}(S_1/PS)$ et $\vec{\Omega}(S_2/PS)$ (relation 4, paragraphe 3).

$$\vec{\Omega}(S_1/PS) = \vec{\Omega}(S_1/R) - \vec{\Omega}(PS/R) = (\omega_1 - \omega) \vec{x}$$

$$\vec{\Omega}(S_2/PS) = \vec{\Omega}(S_2/R) - \vec{\Omega}(PS/R) = (\omega_2 - \omega) \vec{x}.$$

Pour un tel observateur le rapport entre la vitesse de rotation de l'arbre de sortie et la vitesse de rotation de l'arbre d'entrée est égal à la raison K du train d'engrenages,

d'où

$$\frac{\omega_2 - \omega}{\omega_1 - \omega} = K$$

avec

$$K = (-1)^n \frac{\left(\text{Produit des nombres de dents des roues menantes des engrenages} \right)}{\left(\text{Produit des nombres de dents des roues menées des engrenages} \right)}$$

où n = nombre d'engrenages à contact extérieur.

Dans le cas présent, les nombres de dents des roues étant indiqués sur la figure, nous avons :

$$K = + \frac{Z_A Z_C}{Z_B Z_D}.$$

REMARQUES

— La relation de Willis aurait pu être obtenue en écrivant que les cylindres primitifs des différentes roues en contact roulent sans glisser l'un sur l'autre.

— La relation de Willis s'écrit aussi :

$$\omega_2 - K\omega_1 + (K-1)\omega = 0.$$

Par conséquent, nous pouvons dire qu'un train épicycloïdal est un mécanisme qui réalise une fonction linéaire et homogène entre trois vitesses de rotation.

4. VECTEURS ROTATION DE ROULEMENT ET ROTATION DE PIVOTEMENT

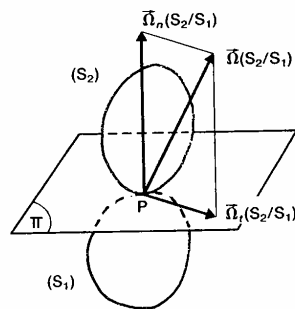


Fig. 7

Soit (S_1) et (S_2) deux solides en contact ponctuel au point P . Notons (Π) le plan tangent commun à P à (S_1) et (S_2).

Soit $\vec{\Omega}(S_2/S_1)$ le vecteur rotation du mouvement (S_2) par rapport à (S_1).

Posons $\vec{\Omega}(S_2/S_1) = \vec{\Omega}_n(S_2/S_1) + \vec{\Omega}_t(S_2/S_1)$, avec

$$\begin{cases} \vec{\Omega}_n(S_2/S_1) & \text{perpendiculaire au plan } (\Pi) \\ \vec{\Omega}_t(S_2/S_1) & \text{parallèle au plan } (\Pi). \end{cases}$$

Définitions

- $\vec{\Omega}_n(S_2/S_1)$ est appelé *vecteur rotation de pivotement* du mouvement du solide S_2 par rapport au solide (S_1) .
- $\vec{\Omega}_r(S_2/S_1)$ est appelé *vecteur rotation de roulement* du mouvement du solide (S_2) par rapport au solide (S_1) .

Application

Considérons un variateur à plateau, réglé dans une position donnée, dont le schéma cinématique est représenté figure 8.

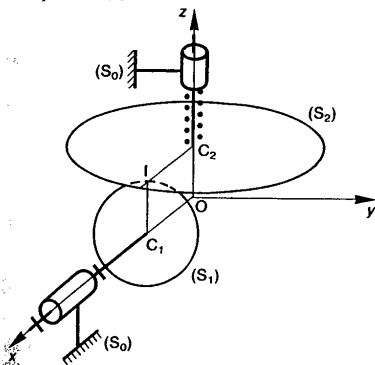


Fig. 8

Soit $R(O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ un repère lié à un bâti (S_0) . Un disque (S_1) de centre C_1 , de rayon r_1 , a une liaison pivot d'axe $(O, \vec{x})$ avec (S_0) . Le centre C_1 est sur $(O, \vec{x})$ et le plan de (S_1) est perpendiculaire à $(O, \vec{x})$. Un plateau circulaire (S_2) de centre C_2 a une liaison pivot glissant d'axe $(O, \vec{z})$ avec (S_0) . Le centre C_2 est sur $(O, \vec{z})$ et le plan de (S_2) est perpendiculaire à $(O, \vec{z})$.

Le plateau circulaire (S_2) roule sans glisser sur le disque (S_1) en un point I tel que :

$$\vec{C_2I} = r_2 \vec{x} \quad (r_2 > 0).$$

On pose :

$$\begin{cases} \vec{\Omega}(S_1/R) = \alpha'_1 \vec{x} \\ \vec{\Omega}(S_2/R) = \alpha'_2 \vec{z} \end{cases}$$

QUESTION 1

Déterminer la relation entre la vitesse angulaire α'_2 du plateau (S_2) et la vitesse angulaire α'_1 du disque (S_1) .

RÉPONSE

(S_2) roule sans glisser sur (S_1) , par conséquent :

$$\vec{V}(I \in S_2/S_1) = \vec{0}.$$

En utilisant la relation (3) du paragraphe 1, de composition des vecteurs vitesse entre (S_2) , (S_1) et R , on obtient :

$$\vec{V}(I \in S_2/S_1) = \vec{V}(I \in S_2/R) - \vec{V}(I \in S_1/R)$$

$\vec{V}(I \in S_2/R)$ se calcule en appliquant la relation entre les vecteurs vitesse des deux points I et C_2 appartenant à (S_2) .

$$\vec{V}(I \in S_2/R) = \vec{V}(C_2/R) + \vec{\Omega}(S_2/R) \wedge \vec{C_2I}$$

comme :

$$\vec{V}(C_2/R) = \vec{0}$$

$$\vec{V}(I \in S_2/R) = \alpha'_2 \vec{z} \wedge r_2 \vec{x}$$

soit :

$$\vec{V}(I \in S_2/R) = r_2 \alpha'_2 \vec{y}.$$

De même, $\vec{V}(I \in S_1/R)$ se calcule en appliquant la relation entre les vecteurs vitesse des deux points I et C_1 appartenant à (S_1) .

$$\vec{V}(I \in S_1/R) = \vec{V}(C_1/R) + \vec{\Omega}(S_1/R) \wedge \vec{C_1I}$$

avec :

$$\vec{V}(C_1/R) = \vec{0}$$

$$\vec{V}(I \in S_1/R) = \alpha'_1 \vec{x} \wedge r_1 \vec{z}$$

soit :

$$\vec{V}(I \in S_1/R) = -r_1 \alpha'_1 \vec{y}.$$

Par suite :

$$\vec{V}(I \in S_2/S_1) = (r_2 \alpha'_2 + r_1 \alpha'_1) \vec{y}.$$

La condition de non glissement se traduit donc par la relation scalaire :

$$r_2 \alpha'_2 + r_1 \alpha'_1 = 0.$$

QUESTION 2

Déterminer le vecteur rotation de roulement et le vecteur rotation de pivotement du mouvement de (S_2) par rapport à (S_1) en fonction de α'_1 , r_1 et r_2 .

RÉPONSE

En utilisant la relation (4) du paragraphe 3 sur la composition des vecteurs rotation, le vecteur rotation du mouvement de (S_2) par rapport à (S_1) peut s'écrire :

$$\vec{\Omega}(S_2/S_1) = \vec{\Omega}(S_2/R) - \vec{\Omega}(S_1/R) = \alpha'_2 \vec{z} - \alpha'_1 \vec{x}$$

avec la relation : $r_2 \alpha'_2 + r_1 \alpha'_1 = 0$

$$\vec{\Omega}(S_2/S_1) = -\frac{r_1}{r_2} \alpha'_1 \vec{z} - \alpha'_1 \vec{x}.$$

Le plan tangent en I entre (S_1) et (S_2) est le plan $(I, \vec{x}, \vec{y})$, et la normale à ce plan est définie par l'axe $(I, \vec{z})$.

Le vecteur rotation de roulement étant parallèle au plan $(I, \vec{x}, \vec{y})$, est donc le vecteur :

$$\vec{\Omega}_r(S_2/S_1) = -\alpha'_1 \vec{x}. \quad (5)$$

Le vecteur rotation de pivotement ayant même direction que la normale $(I, \vec{z})$, est le vecteur :

$$\vec{\Omega}_n(S_2/S_1) = -\frac{r_1}{r_2} \alpha'_1 \vec{z}. \quad (6)$$

5. COMPOSITION DES TORSEURS CINÉMATIQUES

Soit un solide (S) en mouvement par rapport à deux repères R et R_0 eux-mêmes en mouvement l'un par rapport à l'autre.

Soit un point P du solide (S) . Nous avons établi que :

$$\vec{\Omega}(S/R_0) = \vec{\Omega}(S/R) + \vec{\Omega}(R/R_0)$$

$$\vec{V}(P \in S/R_0) = \vec{V}(P \in S/R) + \vec{V}(P \in R/R_0).$$

Ces deux égalités traduisent l'égalité des torseurs suivants :

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{\Omega}(S/R_0) \\ \vec{V}(P \in S/R_0) \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} \vec{\Omega}(S/R) \\ \vec{V}(P \in S/R) \end{array} \right\} + \left\{ \begin{array}{l} \vec{\Omega}(R/R_0) \\ \vec{V}(P \in R/R_0) \end{array} \right\}.$$

Cinématique

D'où la relation de composition des torseurs cinématiques :

$$\{\mathcal{V}(S/R_0)\} = \{\mathcal{V}(S/R)\} + \{\mathcal{V}(R/R_0)\}. \quad (7)$$

Application

Engrenage gauche (figure 9).

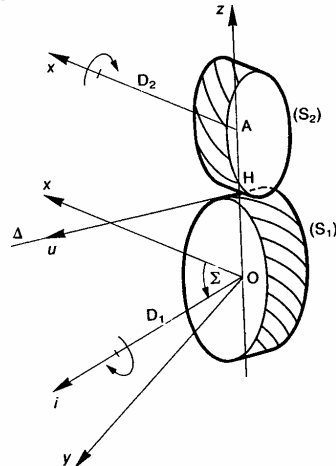


Fig. 9

Soit $R(O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ un repère lié à un bâti (S_0) . (S_1) et (S_2) sont deux roues constituant un engrenage. La roue (S_1) a une liaison pivot d'axe $D_1(O, \vec{i})$ avec (S_0) telle que $\vec{i} \cdot \vec{z} = 0$.

On pose : $\Sigma = (\vec{x}, \vec{i})$.

La roue (S_2) a une liaison pivot d'axe $D_2(A, \vec{x})$ avec (S_0) telle que :

$$\vec{OA} = a\vec{z} \quad (a \geq 0).$$

(La droite OA est la perpendiculaire commune des deux axes des roues (S_1) et (S_2) .)

Les vitesses angulaires de rotation de (S_1) et (S_2) autour de leur axe sont définies par :

$$\begin{cases} \vec{\Omega}(S_1/R) = \omega_1 \vec{i} \\ \vec{\Omega}(S_2/R) = \omega_2 \vec{x} \end{cases}$$

Soit $K = \frac{\omega_2}{\omega_1}$ la raison de l'engrenage. (K est une constante.)

QUESTION 1

Déterminer au point O le torseur cinématique du mouvement de (S_2) par rapport à (S_1) .

RÉPONSE

Les mouvements de (S_1) et (S_2) étant définis par rapport au repère R, appliquons la relation (7) du paragraphe 5 de composition des torseurs cinématiques entre (S_1) , (S_2) et R :

$$\{\mathcal{V}(S_2/S_1)\} = \{\mathcal{V}(S_2/R)\} + \{\mathcal{V}(R/S_1)\}$$

soit

$$\{\mathcal{V}(S_2/S_1)\} = \{\mathcal{V}(S_2/R)\} - \{\mathcal{V}(S_1/R)\}.$$

Le torseur cinématique $\{\mathcal{V}(S_2/R)\}$ a pour éléments de réduction au point A :

$$\{\mathcal{V}(S_2/R)\} = \begin{Bmatrix} \vec{\Omega}(S_2/R) \\ \vec{V}(A/R) \end{Bmatrix}$$

$$\text{comme : } \begin{cases} \vec{\Omega}(S_2/R) = \omega_2 \vec{x} \\ \vec{V}(A/R) = \vec{0} \end{cases}$$

$$\{\mathcal{V}(S_2/R)\} = \begin{Bmatrix} \omega_2 \vec{x} \\ \vec{0} \end{Bmatrix}$$

Ce torseur s'écrit au point O :

$$\{\mathcal{V}(S_2/R)\} = \begin{Bmatrix} \omega_2 \vec{x} \\ \omega_2 \vec{x} \wedge \vec{AO} \end{Bmatrix}$$

soit, avec $\vec{AO} = -a\vec{z}$:

$$\{\mathcal{V}(S_2/R)\} = \begin{Bmatrix} \omega_2 \vec{x} \\ a\omega_2 \vec{y} \end{Bmatrix} \quad (8)$$

Le torseur cinématique $\{\mathcal{V}(S_1/R)\}$ s'écrit au point O :

$$\{\mathcal{V}(S_1/R)\} = \begin{Bmatrix} \vec{\Omega}(S_1/R) \\ \vec{V}(O/R) \end{Bmatrix}$$

$$\text{comme : } \begin{cases} \vec{\Omega}(S_1/R) = \omega_1 \vec{i} \\ \vec{V}(O/R) = \vec{0} \end{cases}$$

$$\{\mathcal{V}(S_1/R)\} = \begin{Bmatrix} \omega_1 \vec{i} \\ \vec{0} \end{Bmatrix}$$

Par suite :

$$\{\mathcal{V}(S_2/S_1)\} = \begin{Bmatrix} \omega_2 \vec{x} \\ \vec{0} \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} \omega_1 \vec{i} \\ \vec{0} \end{Bmatrix}$$

Pour soustraire ces deux torseurs exprimons-les au même point O. Compte tenu de la relation (8), on obtient :

$$\{\mathcal{V}(S_2/S_1)\} = \begin{Bmatrix} \omega_2 \vec{x} \\ a\omega_2 \vec{y} \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} \omega_1 \vec{i} \\ \vec{0} \end{Bmatrix}$$

d'où

$$\{\mathcal{V}(S_2/S_1)\} = \begin{Bmatrix} \omega_2 \vec{x} - \omega_1 \vec{i} \\ a\omega_2 \vec{y} \end{Bmatrix}$$

QUESTION 2

Déterminer l'axe central Δ du torseur cinématique du mouvement de (S_2) par rapport à (S_1) .

RÉPONSE

L'axe central Δ du torseur cinématique $\{\mathcal{V}(S_2/S_1)\}$ a même direction que la résultante générale $\omega_2 \vec{x} - \omega_1 \vec{i}$ de ce torseur (voir chapitre 3 paragraphe 1.2.1).

Pour faciliter les calculs et l'interprétation des résultats, posons :

$$\vec{U} = K\vec{x} - \vec{i} \quad \text{et} \quad \vec{u} = \frac{\vec{U}}{\|\vec{U}\|}.$$

Les vecteurs unitaires $\vec{x}$ et $\vec{i}$ étant fixes dans la base de R, le vecteur $\vec{U}$ et le vecteur unitaire $\vec{u}$ le sont également.

Pour faire intervenir $\vec{U}$ dans l'expression de $\{\mathcal{V}(S_2/S_1)\}$, écrivons que :

$$\{\mathcal{V}(S_2/S_1)\} = \begin{Bmatrix} \omega_1 \left(\frac{\omega_2}{\omega_1} \vec{x} - \vec{i} \right) \\ \omega_1 a \frac{\omega_2}{\omega_1} \vec{y} \end{Bmatrix}$$

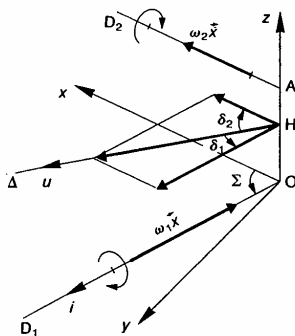


Fig. 10

alors : $\{\psi(S_2/S_1)\} = \begin{Bmatrix} \omega_1 \vec{U} \\ aK\omega_1 \vec{y} \end{Bmatrix}$

On constate donc que le vecteur $\vec{U}$ a même direction que l'axe central Δ et que $\vec{u}$ est un vecteur unitaire de Δ .
Définissons les angles entre Δ et les axes des roues en posant (figures 10 et 11) :

$$\begin{cases} \delta_1 = (\vec{u}, \vec{i}) \\ \delta_2 = (\vec{u}, \vec{x}) \end{cases}$$

(les angles δ_1 et δ_2 sont constants).

Par suite, l'angle Σ s'exprime en fonction de δ_1 et δ_2 :

$$\Sigma = (\vec{x}, \vec{i})$$

$$\Sigma = (\vec{x}, \vec{u}) + (\vec{u}, \vec{i})$$

soit

$$\Sigma = \delta_1 + \delta_2$$

d'où

La direction de Δ étant connue, reste à déterminer la position d'un de ses points dans le repère R.
Le pied H de la perpendiculaire abaissée de O sur Δ est donné par la relation (2) du chapitre 3 paragraphe 1.2.1.

$$\vec{OH} = \frac{\omega_1 \vec{U} \wedge aK\omega_1 \vec{y}}{\omega_1^2 \vec{U}^2}$$

soit

$$\vec{OH} = aK \frac{\vec{U} \wedge \vec{y}}{\vec{U}^2}$$

Le vecteur $\vec{U}$ a même direction que le vecteur unitaire $\vec{u}$, par conséquent on peut écrire :

$$\vec{U} = (\vec{U} \cdot \vec{u}) \vec{u}$$

or

$$\vec{U} = K\vec{x} - \vec{i}$$

et

$$\begin{cases} \vec{x} \cdot \vec{u} = \cos \delta_2 \\ \vec{i} \cdot \vec{u} = \cos \delta_1 \end{cases}$$

alors :

$$\vec{U} = (K \cos \delta_2 - \cos \delta_1) \vec{u}$$

Par suite

$$\vec{OH} = \frac{aK}{K \cos \delta_2 - \cos \delta_1} \vec{u} \wedge \vec{y}$$

soit

$$\vec{OH} = \frac{aK \cos \delta_2}{K \cos \delta_2 - \cos \delta_1} \vec{z}$$

Le point H est un point fixe de l'axe (O, $\vec{z}$).

Posons :

$$\begin{cases} r_1 = \vec{OH} \\ r_2 = \vec{AH} \end{cases}$$

Dans l'engrenage gauche $|r_1|$ et $|r_2|$ sont les rayons des cylindres primitifs des roues (S_1) et (S_2) :

si l'engrenage est à contact extérieur : $r_1 \cdot r_2 \leq 0$,
si l'engrenage est à contact intérieur : $r_1 \cdot r_2 \geq 0$.

La relation entre r_1 , r_2 et l'entraxe a des roues s'obtient en écrivant que :

$$\vec{OH} = \vec{OA} + \vec{AH}$$

soit

$$r_1 = a + r_2$$

d'où la relation :

$$r_1 - r_2 = a$$

Par suite, on peut exprimer r_1 et r_2 en fonction de a , K , δ_1 et δ_2 :

$$r_1 = \frac{aK \cos \delta_2}{K \cos \delta_2 - \cos \delta_1} \quad (8)$$

et

$$r_2 = \frac{a \cos \delta_1}{K \cos \delta_2 - \cos \delta_1} \quad (9)$$

REMARQUES

— Le rapport, membre à membre, des expressions de r_1 et r_2 obtenues en (8) et (9) donne la raison K de l'engrenage en fonction de r_1 , r_2 , δ_1 et δ_2 :

$$K = \frac{r_1 \cos \delta_1}{r_2 \cos \delta_2} \quad (10)$$

(Si $r_2 \neq 0$ et si $\cos \delta_2 \neq 0$.)

— Soit $\vec{v}$ le vecteur unitaire tel que $\vec{v} = \vec{z} \wedge \vec{u}$ (figure 11).

$z \odot$

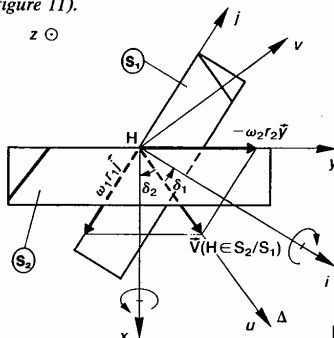


Fig. 11

$\vec{v}$ est perpendiculaire à $\vec{u}$, alors : $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$

soit $(K\vec{x} - \vec{i}) \cdot \vec{v} = 0$

en remarquant que

$$\begin{cases} \vec{x} \cdot \vec{v} = \sin \delta_2 \quad (\delta_2 < 0 \text{ sur la figure}) \\ \vec{i} \cdot \vec{v} = \sin \delta_1 \end{cases}$$

l'expression précédente s'écrit :

$$K \sin \delta_2 - \sin \delta_1 = 0$$

d'où

$$K = \frac{\sin \delta_1}{\sin \delta_2} \quad (11)$$

(si $\sin \delta_2 \neq 0$).

QUESTION 3

Déterminer le moment central du torseur cinématique du mouvement de (S_2) par rapport à (S_1) .

RÉPONSE

Le moment central du torseur cinématique $\{\mathcal{V}(S_2/S_1)\}$ est le moment résultant de ce torseur en un point de son axe central (chapitre 3 paragraphe 1.2.1). Au point H de Δ le moment central est le vecteur vitesse du point H lié à (S_2) par rapport à (S_1) , soit : $\vec{V}(H \in S_2/S_1)$.

Ce vecteur vitesse se calcule à partir du vecteur vitesse connu $\vec{V}(O \in S_2/S_1)$ par la relation :

$$\vec{V}(H \in S_2/S_1) = \vec{V}(O \in S_2/S_1) + \vec{\Omega}(S_2/S_1) \wedge \vec{OH}.$$

$\vec{\Omega}(S_2/S_1)$ et $\vec{V}(O \in S_2/S_1)$ sont les deux éléments de réduction, au point O, du torseur cinématique $\{\mathcal{V}(S_2/S_1)\}$ déterminé à la première question, alors :

$$\vec{V}(H \in S_2/S_1) = aK\omega_1 \vec{y} + \omega_1 \vec{U} \wedge r_1 \vec{z}.$$

Ce moment central a même direction que l'axe central Δ , c'est-à-dire que $\vec{u}$. Or le vecteur $\omega_1 \vec{U} \wedge r_1 \vec{z}$ est perpendiculaire à $\vec{u}$. Par conséquent :

$$\vec{V}(H \in S_2/S_1) = aK\omega_1 (\vec{y} \cdot \vec{u}) \vec{u}$$

comme $\vec{y} \cdot \vec{u} = -\sin \delta_2$ ($\delta_2 < 0$ sur la figure)

$$\vec{V}(H \in S_2/S_1) = -aK\omega_1 \sin \delta_2 \vec{u}. \quad (12)$$

Ce vecteur représente la vitesse de glissement entre les cylindres primitifs en leur point de contact H.

REMARQUES

1. On démontre, pour qu'un engrenage puisse fonctionner correctement, que le plan tangent aux profils conjugués en leur point de contact doit être parallèle à Δ . Donc Δ définit l'inclinaison des dentures par rapport aux axes des roues. $|\delta_1|$ et $|\delta_2|$ sont les inclinaisons primitives des dentures des roues (S_1) et (S_2) .

2. Les surfaces conjuguées en contact étant voisines de Δ , la vitesse de glissement entre les profils en contact à une norme voisine de celle de $\vec{V}(H \in S_2/S_1)$.

Par suite dans le cas du taillage d'une roue par fraise mère $\|\vec{V}(H \in S_2/S_1)\|$ représente la vitesse de coupe.

3. Le vecteur $\vec{V}(H \in S_2/S_1)$ peut se mettre en place géométriquement sur la figure 11 en remarquant que :

$$\vec{V}(H \in S_2/S_1) = \vec{V}(H \in S_2/R) - \vec{V}(H \in S_1/R).$$

Le vecteur $\vec{V}(H \in S_2/R)$ se détermine à partir du vecteur vitesse du point A de l'axe de la roue (S_2) par la relation :

$$\vec{V}(H \in S_2/R) = \vec{V}(A/R) + \vec{\Omega}(S_2/R) \wedge \vec{AH}$$

comme $\vec{V}(A/R) = \vec{0}$

$$\vec{V}(H \in S_2/R) = \omega_2 \vec{x} \wedge r_2 \vec{z}$$

soit

$$\vec{V}(H \in S_2/R) = -\omega_2 r_2 \vec{y}.$$

Le vecteur $\vec{V}(H \in S_1/R)$ se détermine à partir du vecteur vitesse du point O de l'axe de la roue (S_1) par la relation :

$$\vec{V}(H \in S_1/R) = \vec{V}(O/R) + \vec{\Omega}(S_1/R) \wedge \vec{OH}$$

comme $\vec{V}(O/R) = \vec{0}$

$$\vec{V}(H \in S_1/R) = \omega_1 \vec{i} \wedge r_1 \vec{z}$$

soit

$$\vec{V}(H \in S_1/R) = -\omega_1 r_1 \vec{j}.$$

($\vec{j}$ est le troisième vecteur unitaire de la base orthonormée directe $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$).

Par suite

$$\vec{V}(H \in S_2/S_1) = -\omega_2 r_2 \vec{y} + \omega_1 r_1 \vec{j}.$$

QUESTION 4

Pour le cas particulier d'un engrenage à axes parallèles déterminer l'axe central Δ , la raison K en fonction r_1 et r_2 , et la vitesse de glissement $\vec{V}(H \in S_2/S_1)$ entre les surfaces primitives de l'engrenage.

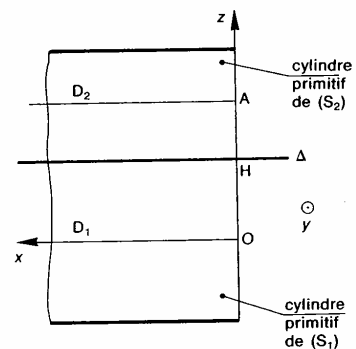
RÉPONSE

Fig. 12

Dans ce cas $\Sigma = 0$ et $a \neq 0$, par suite δ_1 et δ_2 sont π et l'axe central Δ est parallèle aux axes des roues. Les surfaces primitives de l'engrenage sont les surfaces réglées engendrées par Δ dans (S_1) et (S_2) au cours du mouvement.

Dans ce cas les surfaces primitives sont des cylindres de révolution d'axe Δ et D_1 et D_2 , en contact suivant la raison K est obtenue par la relation (10) :

$$K = \frac{r_1}{r_2} = \frac{\omega_2}{\omega_1}.$$

La relation (12) indique que :

$$\vec{V}(H \in S_2/S_1) = \vec{0}.$$

Ce qui montre que les cylindres primitifs roulent sans glisser l'un sur l'autre.

QUESTION 5

Pour le cas particulier d'un engrenage à concourants, déterminer l'axe central Δ , la raison K en fonction de δ_1 et δ_2 , et la vitesse de glissement $\vec{V}(H \in S_2/S_1)$ entre les surfaces primitives de l'engrenage.

RÉPONSE

Dans ce cas $\Sigma \neq 0$ et $a=0$, les relations (8) et (9) indiquent que r_1 et r_2 sont nuls, par suite Δ passe par O.

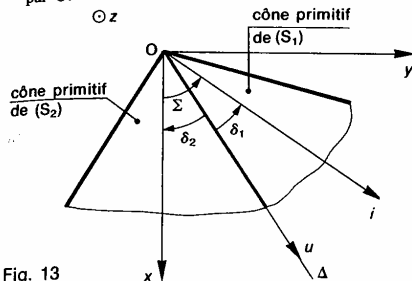


Fig. 13

Les surfaces primitives de l'engrenage sont des cônes de révolution de sommet O, d'axe D_1 et D_2 et de demi-angle au sommet $|\delta_1|$ et $|\delta_2|$, en contact suivant Δ . La raison K est obtenue par la relation (11)

$$K = \frac{\sin \delta_1}{\sin \delta_2}$$

La relation (12) indique que :

$$\vec{V}(H \in S_2/S_1) = \vec{0}.$$

Ce qui montre que les cônes primitifs roulent sans glisser l'un sur l'autre.

REMARQUE

Dans le cas d'un engrenage gauche les surfaces primitives ne sont pas, en général, les surfaces réglées engendrées par Δ dans (S_1) et (S_2) mais des cylindres de révolution d'axe D_1 et D_2 comme cela a été mentionné à la deuxième question, car cela conduirait à des profils conjugués difficiles à fabriquer.

6 COMPOSITION DES VECTEURS ACCELERATION

Soit un solide (S) en mouvement par rapport à deux repères

$$R(O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z}) \text{ et } R_0(O_0, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$$

eux-mêmes en mouvement l'un par rapport à l'autre. Soit P un point du solide (S). Cherchons la relation entre les vecteurs accélération du point P par rapport au repère R_0 ; $\vec{\Gamma}(P/R_0)$ et par rapport au repère R; $\vec{\Gamma}(P/R)$.

Dans le paragraphe 1 nous avons établi la relation (1) suivante entre les vecteurs vitesse de P par rapport à R_0 et à R :

$$\vec{V}(P/R_0) = \vec{V}(P/R) + \vec{V}(O/R_0) + \vec{\Omega}(R/R_0) \wedge \vec{OP}.$$

Dérivons les deux membres de cette égalité par rapport à la date t , pour un observateur lié au repère R_0 .

$$\begin{aligned} \left[\frac{d}{dt} \vec{V}(P/R_0) \right]_{R_0} &= \left[\frac{d}{dt} \vec{V}(P/R) \right]_{R_0} + \left[\frac{d}{dt} \vec{V}(O/R_0) \right]_{R_0} \\ &+ \left[\frac{d}{dt} \vec{\Omega}(R/R_0) \right]_{R_0} \wedge \vec{OP} + \vec{\Omega}(R/R_0) \wedge \left[\frac{d}{dt} \vec{OP} \right]_{R_0}. \end{aligned}$$

(V) (I) (II) (III) (IV)

Calculons successivement chaque terme :

(I) s'écrit :

$$\left[\frac{d}{dt} \vec{V}(P/R) \right]_{R_0} = \left[\frac{d}{dt} \vec{V}(P/R) \right]_R + \vec{\Omega}(R/R_0) \wedge \vec{V}(P/R)$$

soit

$$\left[\frac{d}{dt} \vec{V}(P/R) \right]_{R_0} = \vec{\Gamma}(P/R) + \vec{\Omega}(R/R_0) \wedge \vec{V}(P/R)$$

(II) s'écrit :

$$\left[\frac{d}{dt} \vec{V}(O/R_0) \right]_{R_0} = \vec{\Gamma}(O/R_0)$$

(III) reste inchangé.

(IV) s'écrit :

$$\begin{aligned} \vec{\Omega}(R/R_0) \wedge \left[\frac{d}{dt} \vec{OP} \right]_{R_0} &= \vec{\Omega}(R/R_0) \wedge \left[\left[\frac{d\vec{OP}}{dt} \right]_R + \vec{\Omega}(R/R_0) \wedge \vec{OP} \right] \end{aligned}$$

$$\text{avec } \left[\frac{d}{dt} \vec{OP} \right]_R = \vec{V}(P/R)$$

$$\begin{aligned} \vec{\Omega}(R/R_0) \wedge \left[\frac{d}{dt} \vec{OP} \right]_{R_0} &= \vec{\Omega}(R/R_0) \wedge \vec{V}(P/R) \\ &+ \vec{\Omega}(R/R_0) \wedge [\vec{\Omega}(R/R_0) \wedge \vec{OP}]. \end{aligned}$$

Sachant que (V) est égal à $\vec{\Gamma}(P/R_0)$ on obtient la relation suivante :

$$\begin{aligned} \vec{\Gamma}(P/R_0) &= \vec{\Gamma}(P/R) + \vec{\Gamma}(O/R_0) + \left[\frac{d}{dt} \vec{\Omega}(R/R_0) \right]_{R_0} \wedge \vec{OP} \\ &+ \vec{\Omega}(R/R_0) \wedge [\vec{\Omega}(R/R_0) \wedge \vec{OP}] + 2\vec{\Omega}(R/R_0) \wedge \vec{V}(P/R). \end{aligned}$$

Si on suppose le point P lié à R, la relation précédente s'écrit :

$$\begin{aligned} \vec{\Gamma}(P \in R/R_0) &= \vec{\Gamma}(O/R_0) + \left[\frac{d}{dt} \vec{\Omega}(R/R_0) \right]_{R_0} \wedge \vec{OP} \\ &+ \vec{\Omega}(R/R_0) \wedge [\vec{\Omega}(R/R_0) \wedge \vec{OP}] \end{aligned}$$

qui est la relation entre les vecteurs accélération de deux points O et P d'un solide lié à R.

Alors :

$$\vec{\Gamma}(P/R_0) = \vec{\Gamma}(P/R) + \vec{\Gamma}(P \in R/R_0) + 2\vec{\Omega}(R/R_0) \wedge \vec{V}(P/R). \quad (13)$$

Définitions

- $\vec{\Gamma}(P/R_0)$ est appelé *vecteur accélération absolue*.
- $\vec{\Gamma}(P/R)$ est appelé *vecteur accélération relative*.
- $\vec{\Gamma}(P \in R/R_0)$ est appelé *vecteur accélération d'entraînement*.
- $2\vec{\Omega}(R/R_0) \wedge \vec{V}(P/R)$ est appelé *vecteur accélération de Coriolis*.

Application

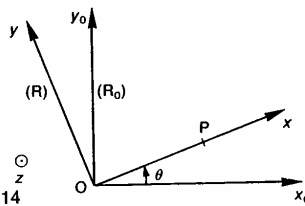


Fig. 14

Soit $R_0(O, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$ un repère lié à un bâti (S_0). Un solide (S) a une liaison pivot d'axe ($O, \vec{z}$) avec (S_0). Soit $R(O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ un repère lié à (S). On pose : $\theta = (\vec{x}_0, \vec{x})$ avec $\theta = \omega t$ (ω constante positive). Un solide (S_1) a une liaison linéique annulaire de centre P, d'axe ($O, \vec{x}$), avec (S) telle que :

$$\vec{OP} = at^2 \vec{x} \quad (a \text{ constante positive}).$$

QUESTION 1

Déterminer les vecteurs vitesse du point P :

$$\vec{V}(P/R) \quad \text{et} \quad \vec{V}(P \in R/R_0).$$

En déduire le vecteur vitesse $\vec{V}(P/R_0)$.

RÉPONSE

Le vecteur vitesse $\vec{V}(P/R)$ s'obtient en dérivant le vecteur position du point P dans R :

$$\vec{V}(P/R) = \left[\frac{d}{dt} \vec{OP} \right]_R$$

$$\text{soit} \quad \vec{V}(P/R) = \left[\frac{d}{dt} at^2 \vec{x} \right]_R$$

d'où

$$\vec{V}(P/R) = 2at\vec{x}.$$

Le vecteur vitesse d'entraînement du point P dans le mouvement de R par rapport à R_0 se détermine à partir du vecteur vitesse $\vec{V}(O/R)$ par la relation :

$$\vec{V}(P \in R/R_0) = \vec{V}(O/R) + \vec{\Omega}(R/R_0) \wedge \vec{OP}.$$

Le point O étant fixe dans R :

$$\vec{V}(O/R) = \vec{0} \quad \text{et} \quad \vec{V}(P \in R/R_0) = \omega \vec{z} \wedge at^2 \vec{x}$$

$$\text{soit} \quad \vec{V}(P \in R/R_0) = a\omega t^2 \vec{y}.$$

Le vecteur vitesse $\vec{V}(P/R_0)$ s'obtient en appliquant la relation (2) du paragraphe 1 de composition des vecteurs vitesse entre les repères R et R_0 :

$$\vec{V}(P/R_0) = \vec{V}(P/R) + \vec{V}(P \in R/R_0).$$

Par suite :

$$\vec{V}(P/R_0) = 2at\vec{x} + a\omega t^2 \vec{y}.$$

Sur la figure 15 sont placés les trois vecteurs vitesse qui viennent d'être calculés.

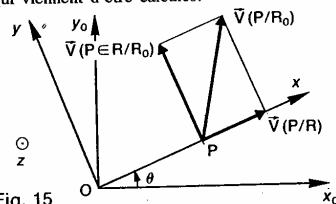


Fig. 15

QUESTION 2

Déterminer les vecteurs accélération du point P suivants :

$$\vec{\Gamma}(P/R) \quad \text{et} \quad \vec{\Gamma}(P \in R/R_0).$$

Puis l'accélération de Coriolis $2\vec{\Omega}(R/R_0) \wedge \vec{V}(P/R)$.

En déduire le vecteur accélération $\vec{\Gamma}(P/R_0)$.

RÉPONSE

Le vecteur accélération $\vec{\Gamma}(P/R)$ s'obtient en dérivant dans R le vecteur vitesse $\vec{V}(P/R)$:

$$\vec{\Gamma}(P/R) = \left[\frac{d}{dt} \vec{V}(P/R) \right]_R$$

$$\text{soit} \quad \vec{\Gamma}(P/R) = \left[\frac{d}{dt} 2at\vec{x} \right]_R$$

d'où

$$\vec{\Gamma}(P/R) = 2a\vec{x}.$$

Le vecteur accélération d'entraînement du point P dans le mouvement de R par rapport à R_0 se détermine à partir du vecteur accélération $\vec{\Gamma}(O/R)$ par la relation (4) du chapitre 3 paragraphe 2.

$$\vec{\Gamma}(P \in R/R_0) = \vec{\Gamma}(O/R_0) + \left[\frac{d}{dt} \vec{\Omega}(R/R_0) \right]_{R_0} \wedge \vec{OP} + \vec{\Omega}(R/R_0) \wedge [\vec{\Omega}(R/R_0) \wedge \vec{OP}].$$

En remarquant que $\vec{\Gamma}(O/R_0) = \vec{0}$ et que $\left[\frac{d}{dt} \vec{\Omega}(R/R_0) \right]_{R_0} = \vec{0}$, il reste :

$$\vec{\Gamma}(P \in R/R_0) = \omega \vec{z} \wedge (\omega \vec{z} \wedge at^2 \vec{x})$$

soit

$$\vec{\Gamma}(P \in R/R_0) = -a\omega^2 t^2 \vec{x}.$$

L'accélération de Coriolis est :

$$2\vec{\Omega}(R/R_0) \wedge \vec{V}(P/R) = 2\omega \vec{z} \wedge 2at\vec{x}$$

soit

$$2\vec{\Omega}(R/R_0) \wedge \vec{V}(P/R) = 4a\omega t \vec{y}.$$

Le vecteur accélération $\vec{\Gamma}(P/R_0)$ s'obtient en appliquant la relation (13) du paragraphe 6 de composition de vecteurs accélération entre les repères R et R_0 :

$$\vec{\Gamma}(P/R_0) = \vec{\Gamma}(P/R) + \vec{\Gamma}(P \in R/R_0) + 2\vec{\Omega}(R/R_0) \wedge \vec{V}(P/R).$$

Par suite

$$\vec{\Gamma}(P/R_0) = a(2 - \omega^2 t^2) \vec{x} + 4a\omega t \vec{y}$$

sur la figure 16 sont placés les quatre vecteurs accélération qui viennent d'être calculés.

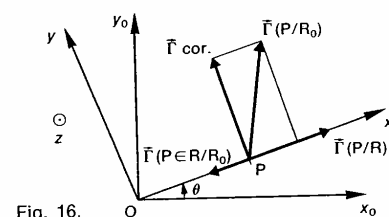


Fig. 16.

À SAVOIR

La relation entre les vecteurs vitesse d'un point P d'un solide (S) en mouvement par rapport à deux repères R et R_0 est :

$$\vec{V}(P/R_0) = \vec{V}(P/R) + \vec{V}(P \in R/R_0)$$

Le vecteur vitesse de glissement au point P du solide (S) par rapport au solide (S₁) est le vecteur $\vec{V}(P \in S/S_1)$.

Ce vecteur est parallèle au plan tangent en P à (S₁) et (S).

Soit un solide (S) en mouvement par rapport à deux repères R et R_0 . Entre les différents vecteurs rotation existe la relation :

$$\vec{\Omega}(S/R_0) = \vec{\Omega}(S/R) + \vec{\Omega}(R/R_0)$$

4. Relation de Willis :

$$\vec{\omega}_2 - \vec{\omega} = K(\vec{\omega}_1 - \vec{\omega})$$

Un sens de parcours de la chaîne cinématique du train épicycloïdal étant fixé, $\omega_2 - \omega$ représente la vitesse de rotation de l'arbre de sortie par rapport au porte-satellite et $\omega_1 - \omega$ représente la vitesse de rotation de l'arbre d'entrée par rapport au porte-satellite. K est la raison du train d'engrenages.

5. Pour un solide (S) en mouvement par rapport à deux repères R et R_0 la relation de composition des torseurs cinématiques s'écrit :

$$\{\mathcal{V}(S/R_0)\} = \{\mathcal{V}(S/R)\} + \{\mathcal{V}(R/R_0)\}$$

6. La relation entre les vecteurs accélération d'un point P d'un solide (S) en mouvement par rapport à deux repères R et R_0 est :

$$\vec{\Gamma}(P/R_0) = \vec{\Gamma}(P/R) + \vec{\Gamma}(P \in R/R_0) + 2\vec{\Omega}(R/R_0) \wedge \vec{V}(P/R)$$

PROBLÈME RÉSOLU

Étude du mouvement d'une bille dans un roulement à billes (figure 17).

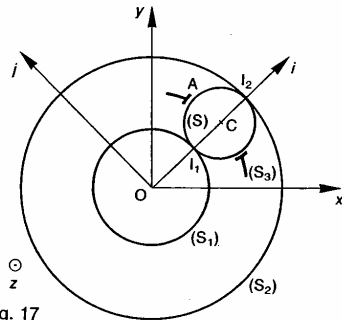


Fig. 17

Soit $R(O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ un repère lié au bâti (S_0). Les deux bagues (S_1) et (S_2) ont une liaison pivot d'axe $(O, \vec{z})$ avec (S_0). On pose :

$$\begin{cases} \vec{\Omega}(S_1/R) = \omega_1 \vec{z} \\ \vec{\Omega}(S_2/R) = \omega_2 \vec{z} \end{cases}$$

La bille (S) de centre C, animée d'un mouvement plan, roule sans glisser en I_1 avec (S_1) et en I_2 avec (S_2). Soit $R_1(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{z})$ un repère tel que $\vec{i}$ ait même direction et même sens que $\vec{OC}$. On pose :

$$\begin{cases} \vec{OI}_1 = r_1 \vec{i} \\ \vec{OI}_2 = r_2 \vec{i} \end{cases}$$

La cage (S_3) a un mouvement de rotation d'axe $(O, \vec{z})$ par rapport à (S_0).

QUESTION 1

Déterminer le torseur cinématique, au point C, du mouvement de la bille par rapport au bâti, en fonction de ω_1 , ω_2 , r_1 et r_2 .

RÉPONSE

Le torseur cinématique, au point C, du mouvement de la bille par rapport au bâti est de la forme :

$$\{\mathcal{V}(S/R)\} = \begin{Bmatrix} \omega \vec{z} \\ v \vec{j} \end{Bmatrix}_C$$

(ω et v sont des valeurs algébriques).

Exprimons qu'au point I_1 la vitesse de glissement de (S) par rapport à (S_1) est nulle :

$$\vec{V}(I_1 \in S/S_1) = \vec{0}$$

En passant par l'intermédiaire de R :

$$\vec{V}(I_1 \in S/R) - \vec{V}(I_1 \in S_1/R) = \vec{0}$$

$\vec{V}(I_1 \in S/R)$ se calcule à partir de la vitesse du point C de (S) :

$$\begin{aligned} \vec{V}(I_1 \in S/R) &= \vec{V}(C/R) + \vec{\Omega}(S/R) \wedge \vec{CI}_1 \\ &= v \vec{j} + \omega \vec{z} \wedge -\frac{1}{2}(r_2 - r_1) \vec{i} \\ &= \left[v - \frac{\omega}{2}(r_2 - r_1) \right] \vec{j} \end{aligned}$$

$\vec{V}(I_1 \in S_1/R)$ se calcule à partir de la vitesse du point O de (S_1) :

$$\begin{aligned} \vec{V}(I_1 \in S_1/R) &= \vec{V}(O/R) + \vec{\Omega}(S_1/R) \wedge \vec{OI}_1 \\ &= \vec{0} + \omega_1 \vec{z} \wedge r_1 \vec{i} \\ &= \omega_1 r_1 \vec{j} \end{aligned}$$

La condition de non glissement en I_1 se traduit donc par la relation :

$$v - \frac{\omega}{2}(r_2 - r_1) - \omega_1 r_1 = 0.$$

Par un calcul analogue, la condition de non glissement en I_2 se traduit par la relation :

$$v + \frac{\omega}{2}(r_2 - r_1) - \omega_2 r_2 = 0.$$

La résolution de ces deux équations permet d'exprimer v et ω :

$$v = \frac{1}{2}(\omega_1 r_1 + \omega_2 r_2)$$

et

$$\omega = \frac{\omega_2 r_2 - \omega_1 r_1}{r_2 - r_1}.$$

QUESTION 2

Déterminer la vitesse de glissement de la bille par rapport à la cage (S_3) au point A, tel que

$$\overrightarrow{CA} = \frac{1}{2}(r_2 - r_1)\vec{j}.$$

RÉPONSE

Pour calculer la vitesse de glissement en A de (S) par rapport à (S_3) passons par l'intermédiaire du point C :

$$\vec{V}(A \in S/S_3) = \vec{V}(C \in S/S_3) + \vec{\Omega}(S/S_3) \wedge \overrightarrow{CA}$$

le point C étant lié à (S) et à (S_3) :

$$\vec{V}(C \in S/S_3) = \vec{0}.$$

Pour obtenir $\vec{\Omega}(S/S_3)$ appliquons la relation de composition des vecteurs rotation entre (S), (S_3) et R

$$\vec{\Omega}(S/S_3) = \vec{\Omega}(S/R) - \vec{\Omega}(S_3/R)$$

$\vec{\Omega}(S/R)$ a été calculé à la question précédente :

$$\vec{\Omega}(S/R) = \frac{\omega_2 r_2 - \omega_1 r_1}{r_2 - r_1} \vec{z}.$$

Pour avoir $\vec{\Omega}(S_3/R)$, qui est égal à $\vec{\Omega}(R_1/R)$, écrivons la relation entre les vecteurs vitesse des points O et C appartenant à R_1 :

$$\vec{V}(C/R) = \vec{V}(O/R) + \vec{\Omega}(R_1/R) \wedge \overrightarrow{OC}$$

$$\frac{1}{2}(\omega_1 r_1 + \omega_2 r_2)\vec{j} = \vec{0} + \vec{\Omega}(R_1/R) \wedge \frac{1}{2}(r_1 + r_2)\vec{i}.$$

Par suite :

$$\vec{\Omega}(R_1/R) = \frac{\omega_1 r_1 + \omega_2 r_2}{r_1 + r_2} \vec{z}$$

et

$$\vec{\Omega}(S/S_3) = \frac{\omega_2 r_2 - \omega_1 r_1}{r_2 - r_1} \vec{z} - \frac{\omega_1 r_1 + \omega_2 r_2}{r_1 + r_2} \vec{z}$$

soit

$$\vec{\Omega}(S/S_3) = \frac{2r_1 r_2 (\omega_2 - \omega_1)}{r_2^2 - r_1^2} \vec{z}.$$

La vitesse de glissement cherchée s'écrit donc :

$$\vec{V}(A \in S/S_3) = \frac{2r_1 r_2 (\omega_2 - \omega_1)}{r_2^2 - r_1^2} \vec{z} \wedge \frac{1}{2}(r_2 - r_1)\vec{j}$$

soit

$$\vec{V}(A \in S/S_3) = \frac{r_1 r_2}{r_2 + r_1} (\omega_2 - \omega_1) \vec{i}.$$

CONSEILS POUR LA RÉSOLUTION

1. Lorsqu'on réalise graphiquement une composition de vecteurs vitesse, vérifier que le vecteur vitesse absolue est bien la somme du vecteur vitesse relative et du vecteur vitesse d'entraînement.

2. Après le calcul d'un vecteur vitesse de glissement, vérifier, au moins, que ce vecteur est bien parallèle au plan tangent commun aux deux solides au point considéré.

3. La relation de Willis a été démontrée pour un train épicycloïdal à axes parallèles. Si le train épicycloïdal est sphérique la relation entre les trois vitesses de rotation s'obtient en exprimant le roulement sans glissement des surfaces primitives au contact.

D'autre part, rappelons que les vitesses de rotation figurant dans la relation de Willis sont des nombres algébriques.

4. Pour ajouter deux torseurs cinématiques, l'écrire au préalable en un même point.

EXERCICES AVEC RÉPONSES

1 — Un petit avion de tourisme est équipé d'un train d'atterrissage tricycle composé :
 — de deux atterrisseurs principaux latéraux,
 — d'un atterrisseur auxiliaire avant.
 L'étude porte sur l'atterrisseur principal gauche (figure 18).

A l'instant de date t_0 les deux roues du train principal entrent simultanément en contact avec le sol, la roue avant ne touchant le sol qu'ultérieurement. La longueur de l'amortisseur est alors maximale et vaut $B_0D = l_0 = 585$ mm. A l'instant de date t_1 l'amortisseur a sa longueur minimale $B_1D = h = 490$ mm.

Entre ces deux dates, le mouvement de l'avion par rapport au sol est une translation caractérisée à chaque instant par le vecteur vitesse du point A par rapport au sol (0) : $\vec{V}(A/0)$.

Ce vecteur vitesse est représenté figure 19 aux deux dates t_0 et t_1 .

A la date t_0 : $\vec{V}(A/0) = -30\vec{x} - 3\vec{y}$ exprimée en mètres par seconde.

A la date t_1 : $\vec{V}(A/0) = -30\vec{x}$ exprimée en mètres par seconde.

Nous supposons que le pneu est indéformable (pas d'aplatissement).

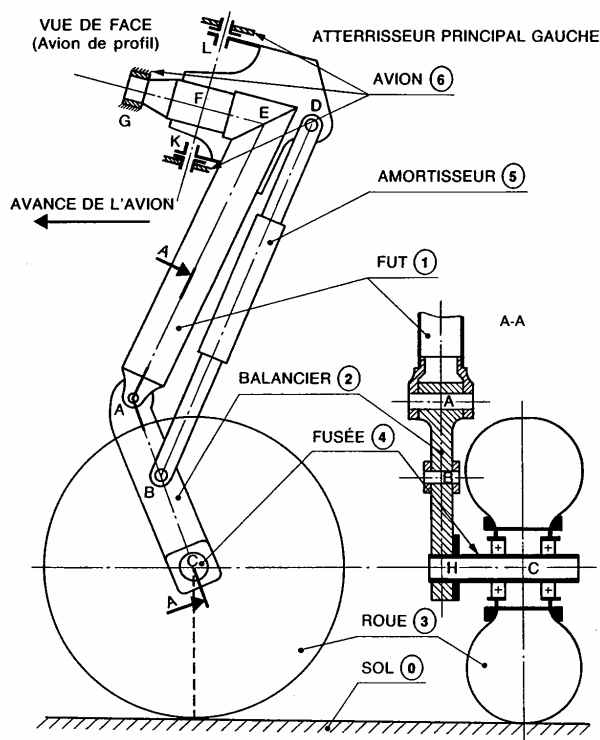


Fig. 18

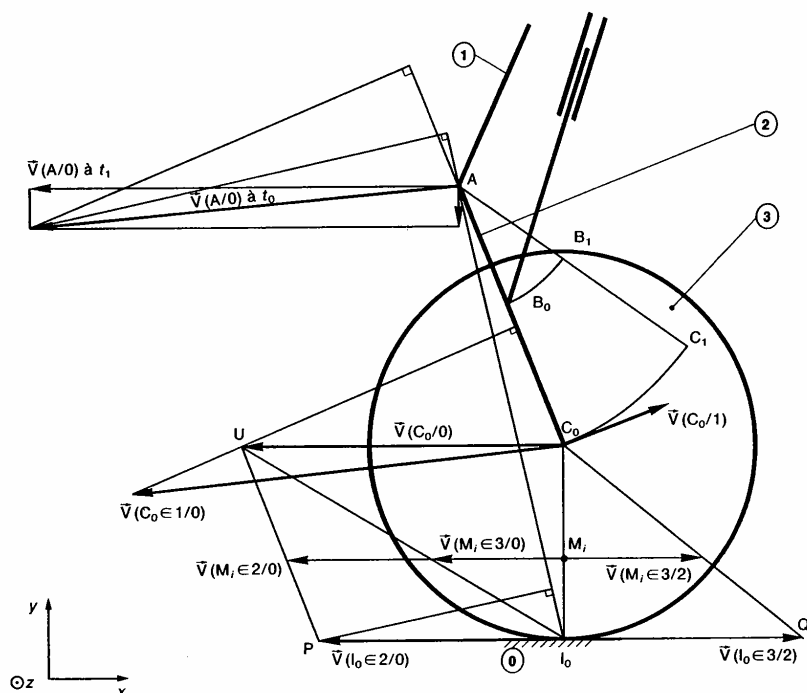


Fig. 19

QUESTIONS

1° Représenter à la date t_0 le vecteur vitesse du point C par rapport au sol : $\vec{V}(C_0/0)$.

2° Représenter à la date t_0 le vecteur vitesse du point C supposé lié au fût (1) par rapport au sol (0) : $\vec{V}(C_0 \in 1/0)$.

3° Représenter à la date t_0 le vecteur vitesse du point C par rapport au fût (1) : $\vec{V}(C_0/1)$.

4° Sachant qu'à la date t_0 la roue (3) roule sans glisser au point I_0 sur le sol (0), représenter à cette date t_0 le vecteur vitesse du point I_0 supposé lié au balancier (2) par rapport au sol (0) : $\vec{V}(I_0 \in 2/0)$, ainsi que le vecteur vitesse du point I_0 supposé lié à la roue (3) par rapport au balancier (2) : $\vec{V}(I_0 \in 3/2)$.

5° Pour tous les points M_i du rayon C_0I_0 , déterminer, à la date t_0 , la répartition des vecteurs vitesse :

$$\vec{V}(M_i \in 2/0), \quad \vec{V}(M_i \in 3/2) \quad \text{et} \quad \vec{V}(M_i \in 3/0).$$

RÉPONSES

1° Le point C reste à une distance constante du sol, donc le vecteur vitesse $\vec{V}(C_0/0)$ est horizontal. En

appliquant le théorème de l'équiprojectivité du champ des vecteurs vitesse des points d'un solide entre les points A et C_0 du balancier (2), on construit le vecteur $\vec{V}(C_0/0)$. On trouve que : $\|\vec{V}(C_0/0)\| = 21,5 \text{ m/s}$.

2° A la date t_0 le fût (1) a un mouvement de translation par rapport au sol (0). Par conséquent :

$$\vec{V}(C_0 \in 1/0) = \vec{V}(A/0)$$

et

$$\|\vec{V}(C_0 \in 1/0)\| = 30,15 \text{ m/s}.$$

3° En appliquant la relation de composition des vecteurs vitesse au point C_0 entre le fût (1) et le sol (0) :

$$\vec{V}(C_0/0) = \vec{V}(C_0/1) + \vec{V}(C_0 \in 1/0)$$

on peut construire le vecteur vitesse $\vec{V}(C_0/1)$, en sachant qu'il est perpendiculaire à AC_0 . On trouve que $\|\vec{V}(C_0/1)\| = 9 \text{ m/s}$.

4° En appliquant le théorème de l'équiprojectivité du champ des vecteurs vitesse des points d'un solide entre les points I_0 et C_0 d'une part, et entre les points I_0 et A d'autre part, on peut construire le vecteur vitesse $\vec{V}(I_0 \in 2/0)$.

On trouve que :

$$\|\vec{V}(I_0 \in 2/0)\| = 16 \text{ m/s}.$$

Le roulement sans glissement de la roue (3) sur le sol (0) au point I_0 se traduit par la relation :

$$\vec{V}(I_0 \in 3/0) = \vec{0}.$$

Appliquons la relation de composition des vecteurs vitesse au point I_0 entre (3), (2) et (0) :

$$\vec{V}(I_0 \in 3/0) = \vec{V}(I_0 \in 3/2) + \vec{V}(I_0 \in 2/0)$$

alors : $\vec{V}(I_0 \in 3/2) = -\vec{V}(I_0 \in 2/0)$
d'où la construction de $\vec{V}(I_0 \in 3/2)$.

5° Tous ces vecteurs vitesse ont leur origine sur le segment C_0I_0 .

L'extrémité de $\vec{V}(M_i \in 2/0)$ est sur PU.

L'extrémité de $\vec{V}(M_i \in 3/2)$ est sur QC₀.

L'extrémité de $\vec{V}(M_i \in 3/0)$ est sur I₀U.

Ces trois vecteurs vitesse vérifient la relation :

$$\vec{V}(M_i \in 3/0) = \vec{V}(M_i \in 3/2) + \vec{V}(M_i \in 2/0).$$

2 — Un mécanisme de changement de vitesse, à deux vitesses et une marche arrière est représenté figure 20. R(O, $\vec{x}$, $\vec{y}$, $\vec{z}$) est un repère lié au bâti (S_0) de ce mécanisme. L'arbre moteur (M) a une liaison pivot d'axe (O, $\vec{x}$) avec (S_0). (M) porte un satellite (S), d'axe parallèle à $\vec{x}$, constitué de trois roues dentées (S_1), (S_2) et (S_3) qui engrenent respectivement avec les 3 roues dentées (S_2), (S_4) et (S_6), d'axe (O, $\vec{x}$).

On pose

$$\begin{aligned}\vec{\Omega}(M/R) &= \omega_1 \vec{x}, & \vec{\Omega}(S/M) &= \omega_2 \vec{x}, \\ \vec{\Omega}(S_2/R) &= \omega_2 \vec{x}, & \vec{\Omega}(S_4/R) &= \omega_4 \vec{x}, \\ \vec{\Omega}(S_6/R) &= \omega_6 \vec{x}.\end{aligned}$$

Nombre de dents de la roue (S_1) : 36, (S_2) : 36, (S_3) : 48, (S_4) : 24, (S_5) : 30, (S_6) : 42.

Les roues (S_4) et (S_6) peuvent être immobilisées par rapport à (S_0) par deux freins à commande électromagnétique F et F'. Un embrayage (E) permet la solidarisation des roues (S_2) et (S_4).

QUESTIONS

1° Déterminer la relation entre les vitesses de rotation suivantes :

- a) ω_1 , ω et ω_2 ;
- b) ω_1 , ω et ω_4 ;
- c) ω_1 , ω et ω_6 .

2° Déterminer le rapport $\frac{\omega_2}{\omega_1}$ dans chacun des cas suivants :

- a) Première vitesse : (F) desserré, (F') serré, (E) débrayé.
- b) Deuxième vitesse : (F) et (F') desserrés, (E) embrayé.
- c) Marche arrière : (F) serré, (F') desserré, (E) débrayé.

RÉPONSES

1° a) $\omega + \omega_2 - \omega_1 = 0$.

b) $2\omega + \omega_4 - \omega_1 = 0$.

c) $5\omega + 7\omega_6 - 7\omega_1 = 0$.

2° a) $\frac{\omega_2}{\omega_1} = \frac{1}{2}$.

b) $\frac{\omega_2}{\omega_1} = 1$.

c) $\frac{\omega_2}{\omega_1} = -\frac{2}{5}$.

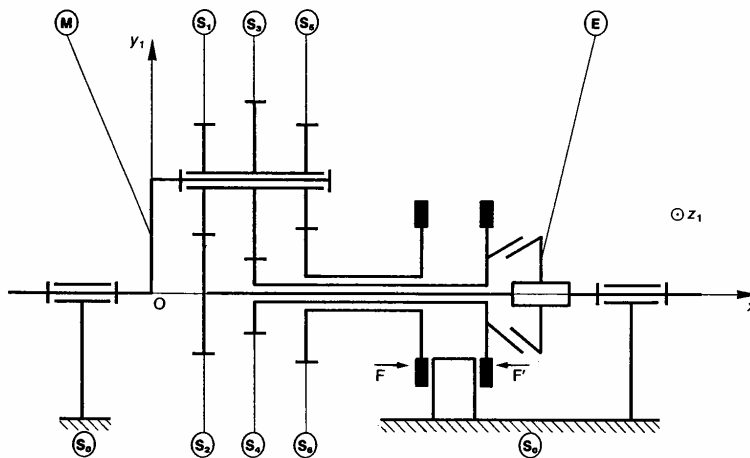


Fig. 20

3 — La pompe oscillante dont le dessin est donné figure 21 est schématisée figure 22 en vue du calcul de la vitesse de translation du piston (S_2) par rapport au bloc oscillant (S_3).

$R(O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ est un repère lié au corps (S_0) de la pompe. La manivelle (S_1) a une liaison pivot d'axe ($O, \vec{z}$) avec (S_0). Soit $R_1(O, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z})$ un repère lié à (S_1), on pose : $\alpha = (\vec{x}, \vec{x}_1)$.

Le piston (S_2) a une liaison pivot d'axe ($A, \vec{z}$) avec (S_1), telle que $\vec{OA} = r\vec{x}_1$ ($r > 0$).

Le bloc oscillant (S_3) a une liaison pivot glissant d'axe ($B, \vec{z}$) avec (S_0), telle que $\vec{OB} = l\vec{x}$ ($l > r$). (S_2) et (S_3) ont une liaison pivot glissant d'axe AB .

Soit $R_2(A, \vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z})$ le repère lié à (S_2) tel que $\vec{x}_2$ ait même direction et même sens que $\vec{AB}$. On pose $\beta = (\vec{x}, \vec{x}_2)$.

QUESTIONS

1° Les angles α et β étant dépendants, déterminer la relation liant ces deux paramètres.

2° Déterminer le vecteur vitesse de glissement du point B dans le mouvement de (S_2) par rapport à (S_3) en fonction de :

a) l, β et α' ;

b) l, r, α et α' .

RÉPONSES

1° $l \sin \beta = r \sin(\beta - \alpha)$.

(β est négatif sur la figure 22).

2° a) $\vec{V}(B \in S_2/S_3) = l\alpha' \sin \beta \vec{x}_2$

b) $\vec{V}(B \in S_2/S_3) = \frac{-l\alpha' \sin \alpha}{\sqrt{l^2 + r^2 - 2lr \cos \alpha}} \vec{x}_2$.

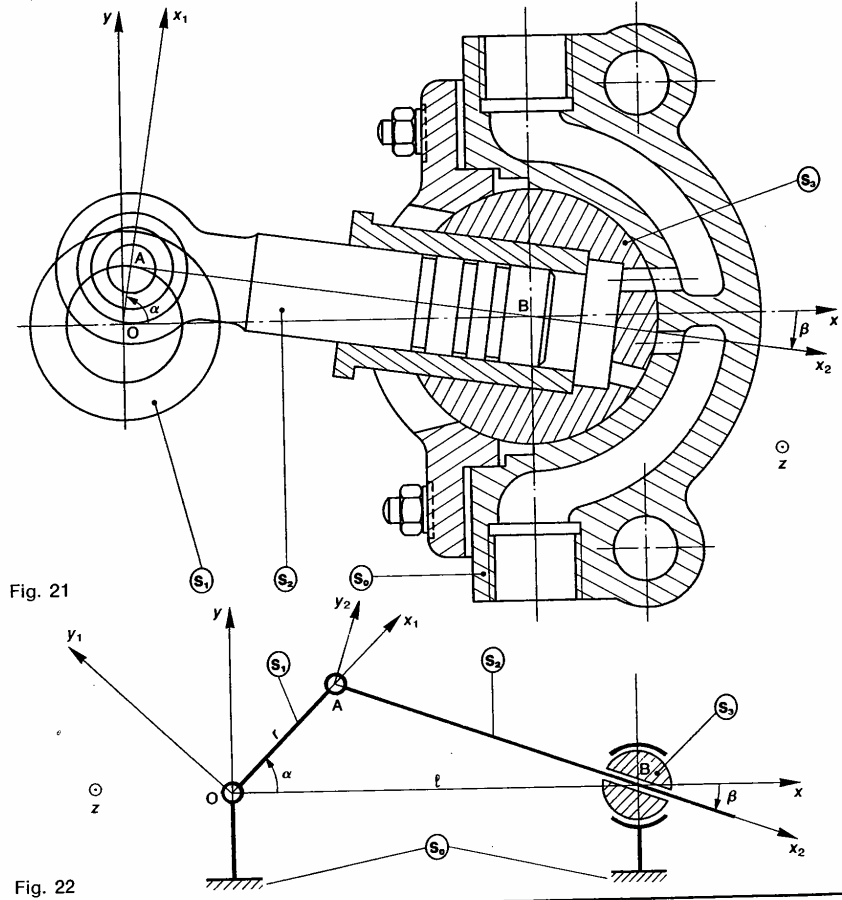


Fig. 21

Fig. 22

4 — Le dessin partiel d'un réducteur à billes est donné figure 23 et le schéma cinématique figure 24.

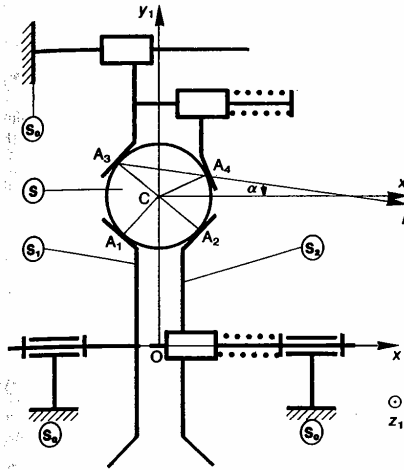


Fig. 24

Soit $R(O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ un repère lié au bâti (S_0) du réducteur. L'arbre moteur (S_1) et l'arbre récepteur (S_2) ont une liaison pivot d'axe ($O, \vec{x}$) avec (S_0). On pose :

$$\vec{\Omega}(S_1/R) = \omega_1 \vec{x}$$

$$\vec{\Omega}(S_2/R) = \omega_2 \vec{x}$$

Une bille (S) de centre C , de rayon a , roule sans glisser en A_1 sur (S_1), en A_2 sur (S_2), et en A_3 et A_4 sur (S_0). Soit $R_1(O, \vec{x}, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$ un repère tel que :

$$\vec{OC} = r \vec{y}_1 \quad (r > 0).$$

Les points de contact sont tels que :

$$(\vec{y}_1, \vec{CA}_3) = (\vec{CA}_1, -\vec{y}_1) = (-\vec{y}_1, \vec{CA}_2) = \frac{\pi}{4}$$

et

$$(\vec{x}, \vec{CA}_4) = \frac{\pi}{6}.$$

Soit $\vec{i}$ le vecteur unitaire de même direction et de même sens que le vecteur $\vec{A}_3\vec{A}_4$. On pose : $\alpha = (\vec{i}, \vec{x})$ (α est un angle constant).

Le but de l'exercice est de déterminer le rapport de réduction $\frac{\omega_2}{\omega_1}$ du réducteur. Pour cela, répondre successivement aux questions suivantes :

QUESTIONS

1° Montrer que l'axe central du torseur cinématique du mouvement de (S) par rapport à (S_0) est la droite A_3A_4 .

2° On pose : $\vec{\Omega}(S/R) = \omega \vec{i}$. Calculer $\vec{V}(A_1 \in S/R)$ et $\vec{V}(A_2 \in S/R)$ en fonction de a , ω et α .

3° Déterminer le rapport de réduction $\frac{\omega_2}{\omega_1}$ du réducteur à billes. Faire l'application numérique.

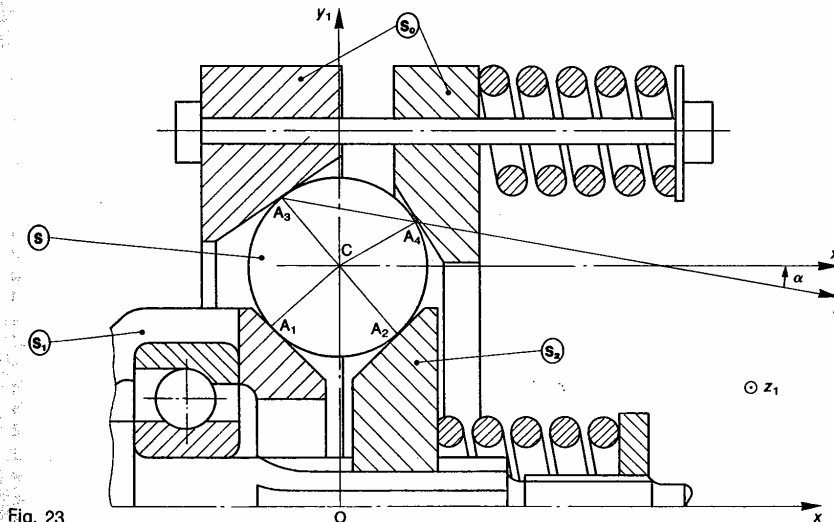


Fig. 23

RÉPONSES

1° En A_3 et A_4 les vitesses de glissement entre (S) et (S_0) sont nulles. Par conséquent, en ces points le moment résultant du torseur cinématique du mouvement de (S) par rapport à (S_0) est nul. Or, c'est en un point de l'axe central que la norme du moment résultant est minimum, donc si cette norme est nulle le point considéré est situé sur l'axe central du torseur. Par suite, les points A_3 et A_4 sont deux points de l'axe central du torseur $\{\mathcal{V}(S/R)\}$, et on peut poser $\vec{\Omega}(S/R) = \omega \vec{z}_1$.

$$2^\circ \vec{V}(A_1 \in S/R) = -a\omega\sqrt{2} \cos \alpha \vec{z}_1$$

$$\vec{V}(A_2 \in S/R) = a\omega\sqrt{2} (\sin \alpha - \cos \alpha) \vec{z}_1.$$

$$3^\circ \frac{\omega_2}{\omega_1} = 1 - \tan \alpha.$$

$$\text{Application numérique : } \frac{\omega_2}{\omega_1} = 0,868.$$

5 — Le dessin du variateur de vitesse Graham est donné figure 25 et le schéma cinématique figure 26.

Soit $R(O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ un repère lié au bâti (S_0) du variateur. L'arbre moteur (S_1) et l'arbre récepteur (S_2) ont une liaison pivot d'axe ($O, \vec{x}$) avec (S_0). On pose :

$$\vec{\Omega}(S_1/R) = \omega_1 \vec{x}$$

$$\vec{\Omega}(S_2/R) = \omega_2 \vec{x}.$$

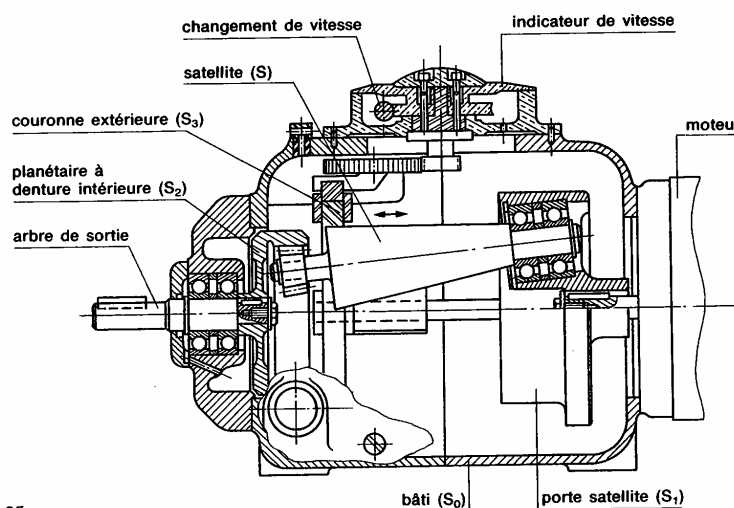


Fig. 25

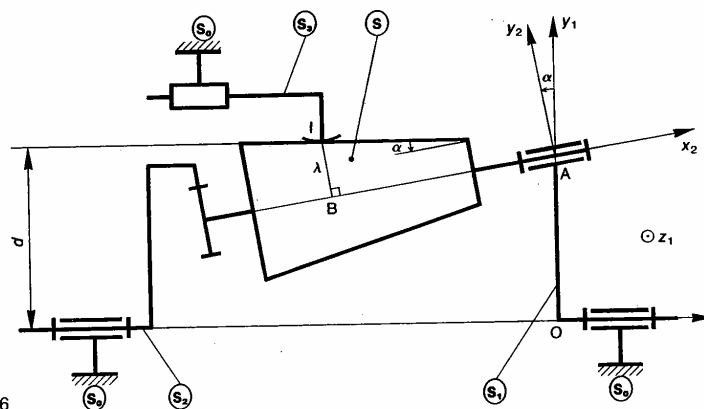


Fig. 26

Soient $R_1(O, \vec{x}, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$ et $R_2(A, \vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_2)$ deux repères liés à (S_1) tels que $\vec{OA}$ ait même direction et même sens que $\vec{y}_1$.

On pose $\alpha = (\vec{x}, \vec{x}_2)$ (α est constant).

Le satellite (S) a une liaison pivot d'axe $(A, \vec{x}_2)$ avec (S_1) . (S) est un tronc de cône de révolution d'axe $(A, \vec{x}_2)$, de demi-angle au sommet α .

On pose $\Omega(S/S_1) = \omega \vec{x}_2$.

La génératrice de (S) du plan $(O, \vec{x}, \vec{y}_1)$ la plus éloignée de l'axe $(O, \vec{x})$ est parallèle à $\vec{x}$.

Notons d sa distance à l'axe $(O, \vec{x})$.

(S) roule sans glisser au point I sur une couronne (S_3) , liée à (S_0) pendant le fonctionnement. Le réglage du rapport de variation s'obtient en déplaçant (S_3) suivant l'axe $(O, \vec{x})$.

Soit B le centre de la section droite du tronc de cône passant par I. On pose $\vec{BI} = \lambda \vec{y}_2$.

L'extrémité de (S) est fixée une roue dentée de n dents, d'axe $(A, \vec{x}_2)$, qui engrène avec une couronne dentée intérieure d'axe $(O, \vec{x})$, de n_2 dents, liée à (S_2) .

QUESTIONS

1° En exprimant que (S) roule sans glisser sur (S_3) au point I, déterminer ω en fonction de ω_1 .

2° Quelle relation obtient-on entre ω_1 , ω_2 et ω en exprimant l'engrènement des deux roues dentées?

3° En déduire le rapport de variation $\frac{\omega_2}{\omega_1}$ du mécanisme en fonction de λ .

4° Tracer la courbe représentative du rapport de variation $\frac{\omega_2}{\omega_1}$ en fonction de λ , sachant que $\frac{n}{n_2} = \frac{11}{38}$, $d = 55$ mm, et que λ varie entre la valeur $\lambda_{\min} = 12$ mm et la valeur $\lambda_{\max} = 23$ mm.

RÉPONSES

1° $\omega = -\frac{d}{\lambda} \omega_1$.

2° $n_2(\omega_2 - \omega_1) = n\omega$.

3° $\frac{\omega_2}{\omega_1} = 1 - \frac{n}{n_2} \frac{d}{\lambda}$.

4° Voir figure.

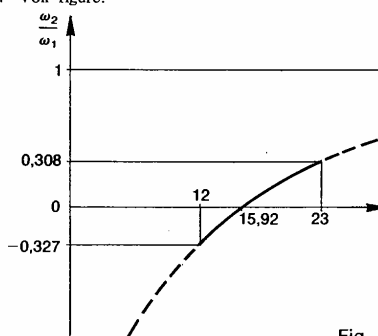


Fig. 27

EXERCICES SANS RÉPONSES

6 — La course d'une table de rectifieuse plane est réglée au moyen de deux interrupteurs de fin de course commandés par des butées réglables.

La figure 28 donne le plan de l'un de ces ensembles.

Lorsque la butée (2), liée à la table (1), vient en contact avec le galet (3) sa vitesse de translation est

$$\vec{V}(A \in 2/0) = V \vec{x} \text{ avec } V = 1 \text{ m/s.}$$

Le galet roule sans glisser sur la pente de la butée (2).

Soient respectivement B, C et D les centres des articulations entre (7) et (3), (8) et (5), (6) et (14).

Le ressort (12) est destiné à ramener le bras (4) en position initiale.

Le contact (8) est métallique et assure, en position « repos » le passage du courant électrique entre les deux plots (10), et en position « action » la coupure du courant électrique.

Soit F un point de la surface de contact entre (8) et (10).

Le guide (11) est en liaison pivot glissant avec (8), et se termine dans sa partie basse par un cône à 90° en appui ponctuel au sommet E de la cuvette conique à 120° creusée dans le bâti (14).

QUESTIONS

1° Représenter le vecteur vitesse du point A supposé lié à la roue (3) par rapport au bâti (0) : $\vec{V}(A \in 3/0)$.

2° Déterminer graphiquement le vecteur vitesse du point B par rapport au bâti (0) : $\vec{V}(B/0)$.

3° Déterminer le vecteur vitesse du point C par rapport au bâti (0) : $\vec{V}(C/0)$.

4° Déterminer le vecteur vitesse du point C par rapport au guide (11) : $\vec{V}(C/11)$.

En déduire le vecteur vitesse du point E supposé lié à (8) par rapport à (11).

5° Déterminer le vecteur vitesse du point E supposé lié à (8) par rapport à (0) : $\vec{V}(E \in 8/0)$.

6° Connaissant les vecteurs vitesses $\vec{V}(C/0)$ et $\vec{V}(E \in 8/0)$ déterminer le vecteur vitesse du point F supposé lié à (8) par rapport à (0).

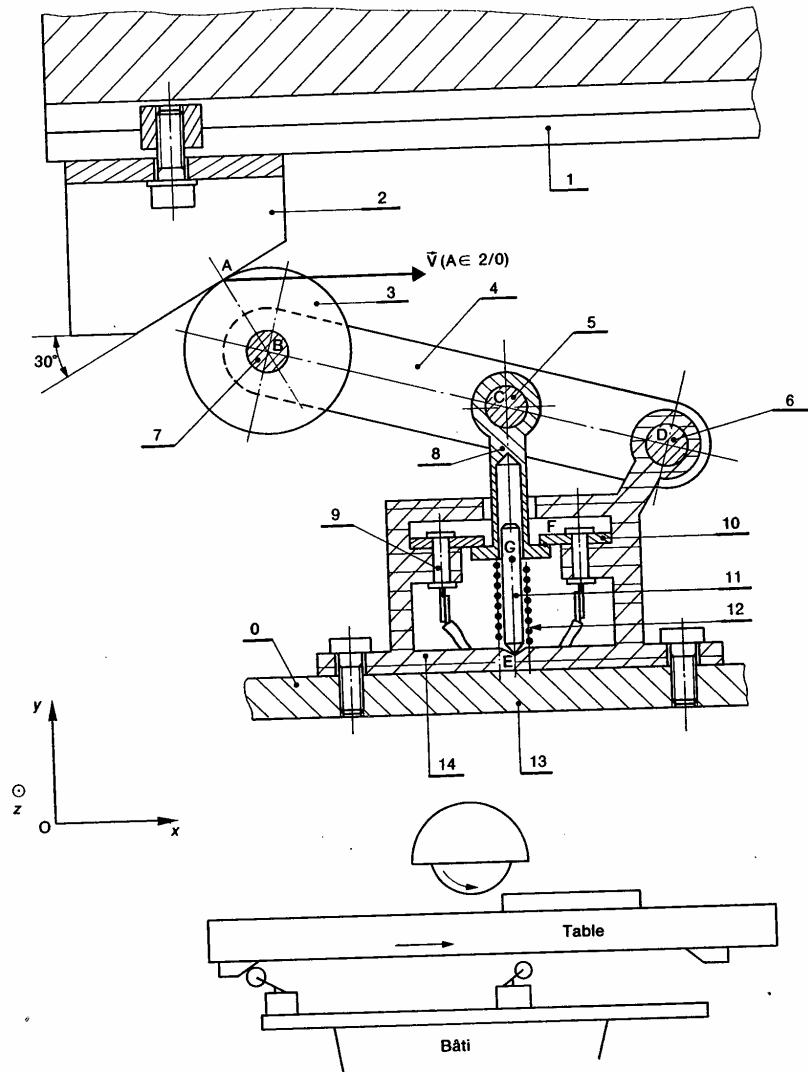


Fig. 28

7 — Le dessin de la pompe à débit réglable DKM est donné figure 29 ainsi qu'un dessin partiel figure 30.

L'excentrique (1) ayant un mouvement de rotation autour de l'axe (O, $\vec{z}$) du bâti (Σ) met en mouvement la bielle (2) qui commande la translation du piston (4) par l'intermédiaire du balancier (3), articulé autour de l'axe (C, $\vec{z}$) du bâti (Σ). (Le réglage du débit est obtenu par variation de la distance EC.)

QUESTION

En supposant connu le vecteur vitesse du point A par rapport au bâti (Σ), déterminer graphiquement, dans la configuration proposée, le vecteur vitesse de translation du piston (4) par rapport au bâti (Σ).

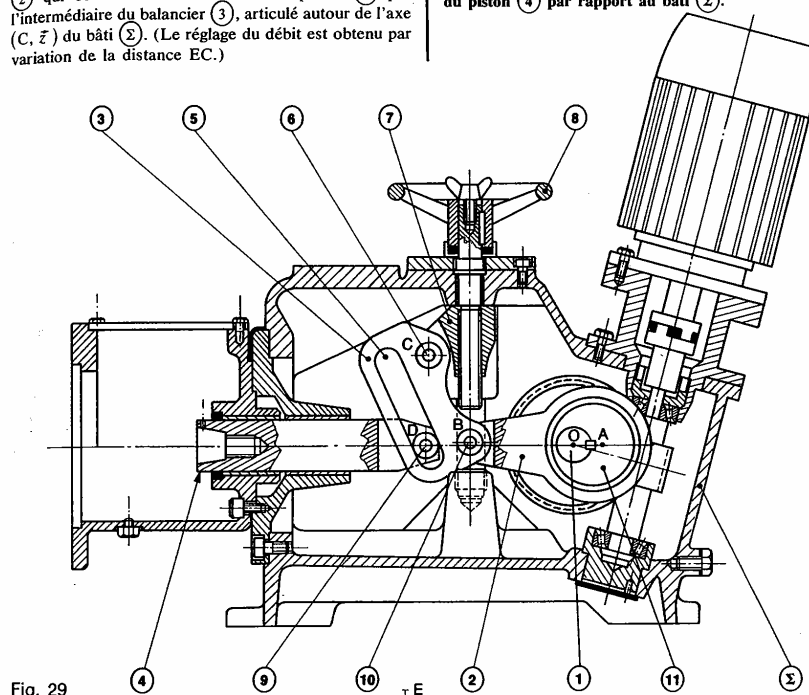


Fig. 29

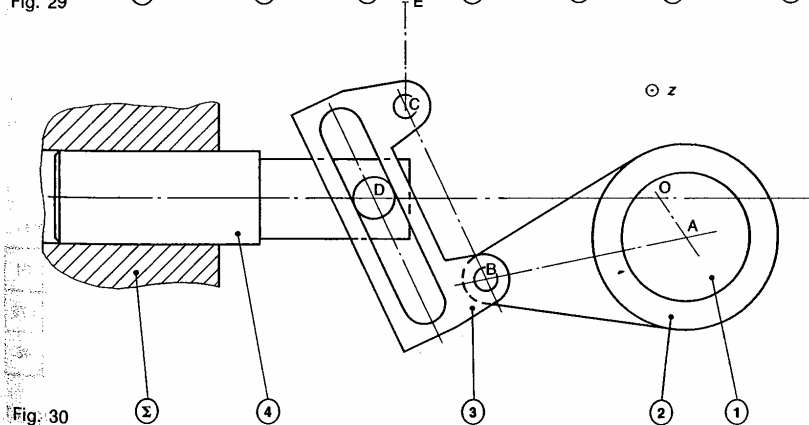
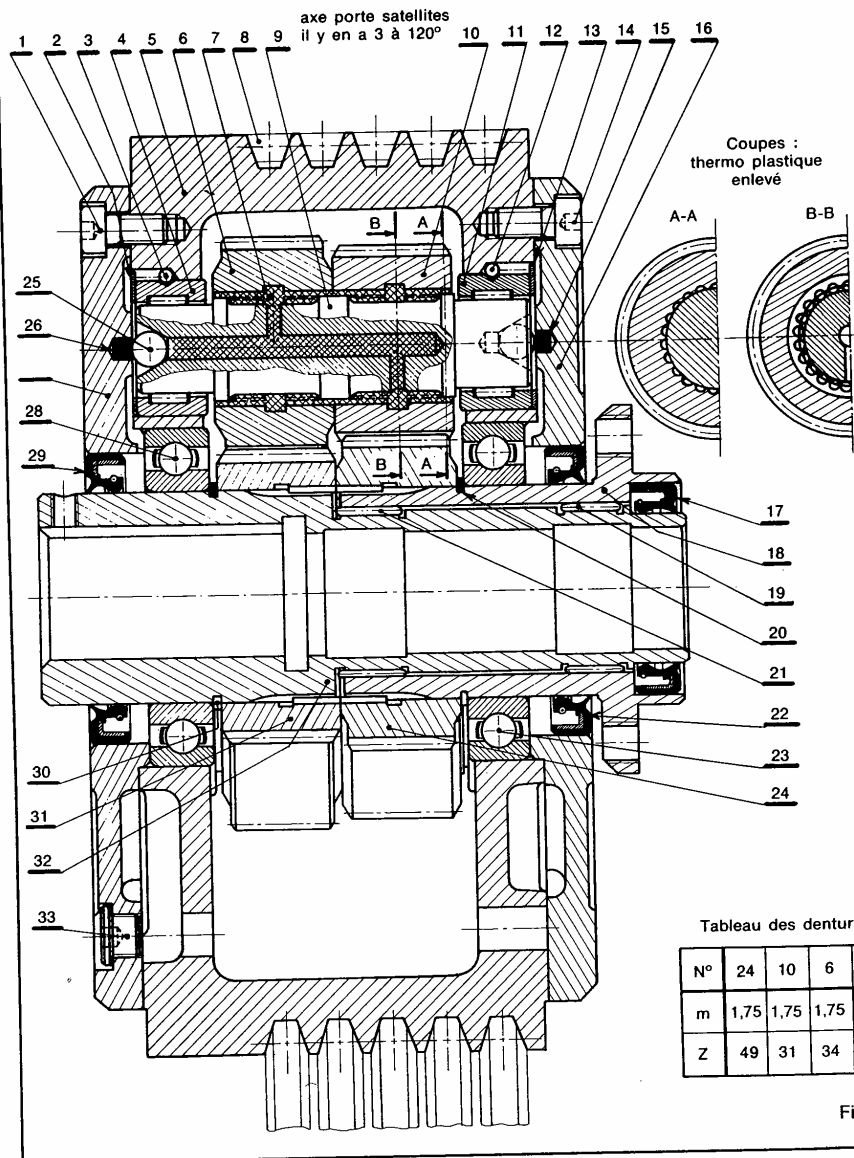


Fig. 30

8 — La figure 31 représente une poulie réductrice REDEX qui se monte sur l'axe de l'appareil commandé. Le corps (5) est entraîné par cinq courroies trapézoïdales (8), et porte les axes porte-satellites (9).

Trois satellites (10) roulent sur un planétaire (24) immobilisé en rotation par un bras de réaction, non représenté sur la figure, fixé sur le fourreau (18). Trois autres satellites (6) entraînent le deuxième planétaire (31).



solidaires du moyeu (32), lequel est claveté sur l'axe de l'appareil commandé.

Les nombres de dents des pignons (24), (10), (6), (31) sont donnés par le tableau de la figure 31.

QUESTIONS

1° Établir le schéma cinématique de ce mécanisme.

2° Déterminer la vitesse de rotation ω_2 de l'arbre de sortie (32) par rapport au bâti (0), en fonction de la vitesse de rotation ω_1 du corps (5) par rapport au bâti (0), et du nombre de dents des pignons (24), (10), (6) et (31).

9 — Le schéma cinématique de la figure 32 est celui du variateur de vitesse « Patin ».

$R(O, \bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ est un repère lié au bâti (S_0) du variateur de vitesse.

L'arbre d'entrée (S_1), l'arbre de sortie (S_2) et le porte-satellite (PS) ont des liaisons pivot d'axe ($O, \bar{x}$) avec (S_0). On pose :

$$\vec{\Omega}(S_1/R) = \omega_1 \bar{x}$$

$$\vec{\Omega}(S_2/R) = \omega_2 \bar{x}$$

$$\vec{\Omega}(PS/R) = \omega \bar{x}$$

La rotation du porte-satellite (PS) est obtenue à partir de la rotation de l'arbre d'entrée (S_1) par l'intermédiaire d'un train épicycloïdal constitué d'un pignon satellite (S), en liaison pivot d'axe parallèle à $\bar{x}$ avec (PS), engrénant avec une roue dentée liée à (S_1) et avec une couronne à denture intérieure liée à (S_0).

Nombre de dents de la roue liée à (S_1) : n_1 , du satellite (S) : n et de la couronne liée à (S_0) : n_0 .

Le porte-satellite supporte des galets orientables tels que le galet (G).

Soit $R_1(O, \bar{x}, \bar{y}_1, \bar{z}_1)$ un repère lié à (PS).

Le galet (G) de rayon a , de centre C tel que $\vec{OC} = l\bar{y}_1$

($l > 0$), roule sans glisser en I_1 et I_2 sur deux surfaces toriques liées à (S_1) et (S_2).

Soit $R_2(C, \bar{x}_2, \bar{y}_2, \bar{z}_2)$ le repère tel que ($C, \bar{x}_2$) ait même direction et même sens que $I_1\bar{I}_2$.

On pose : $\alpha = (\bar{x}, \bar{x}_2)$ (α est réglable mais supposé constant pendant le fonctionnement).

Le galet (G) a une liaison pivot d'axe ($C, \bar{y}_2$) avec (PS). On pose :

$$\vec{\Omega}(G/PS) = \Omega \bar{y}_2$$

Le but de l'exercice est de déterminer le rapport $\frac{\omega_2}{\omega_1}$ en fonction de α .

QUESTIONS

1° Déterminer la vitesse de rotation ω du porte-satellite (PS) en fonction de la vitesse de rotation ω_1 de l'arbre d'entrée (S_1).

2° Déterminer la relation scalaire qui traduit le non glissement au point de contact I_1 de (G) avec (S_1).

3° Déterminer la relation scalaire qui traduit le non glissement au point de contact I_2 de (G) avec (S_2).

4° Montrer que le rapport de variation est :

$$\frac{\omega_2}{\omega_1} = \frac{n_1(l + a \sin \alpha) - n_0(l - a \sin \alpha)}{(n_0 + n_1)(l + a \sin \alpha)}$$

10 — Le variateur de vitesse à billes PIV (figure 33) est constitué de deux plateaux décalés entre lesquels est enfermée une série de billes maintenue par une cage intermédiaire pouvant se déplacer suivant un axe afin de modifier le rapport de variation du mécanisme. Pour déterminer le rapport de variation adoptons le schéma cinématique de la figure 34.

Soit $R(O, \bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ un repère lié au bâti (S_0) du variateur. L'origine O est le centre de la cage à billes (S_3), supposé fixe par rapport à (S_0) pendant le fonctionnement.

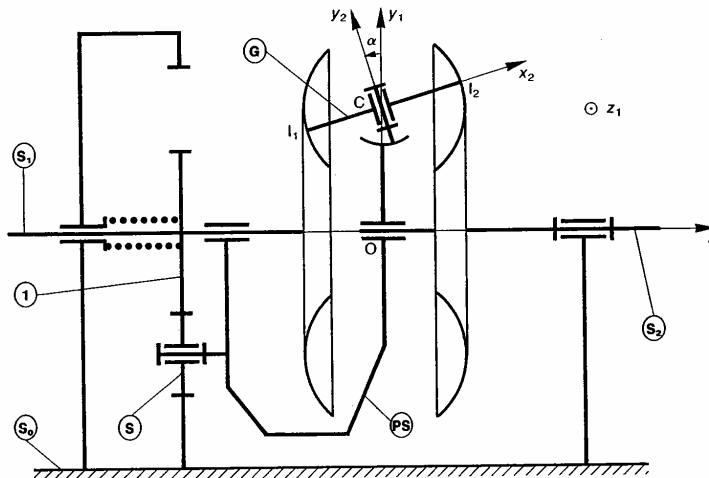


Fig. 32

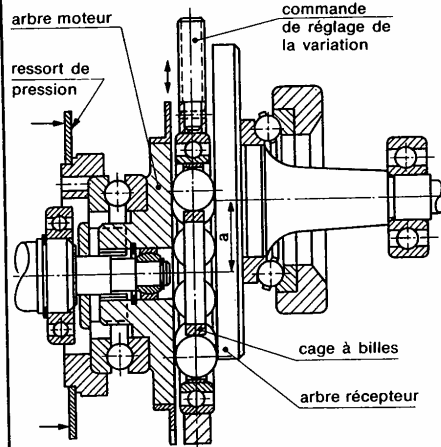


Fig. 33

Le plateau moteur (S_1) et le plateau récepteur (S_2) ont une liaison pivot d'axe ($O_1, \vec{x}$) et ($O_2, \vec{x}$) respectivement avec (S_0), telles que :

$$\vec{O_1O_2} = a\vec{y} \quad (a > 0)$$

$$\vec{O_1O} = \lambda\vec{y} \quad (0 \leq \lambda < a)$$

λ est constant pendant le fonctionnement.

On pose :

$$\vec{\Omega}(S_1/R) = \omega_1\vec{x}$$

$$\vec{\Omega}(S_2/R) = \omega_2\vec{x}$$

Une bille (S) de la cage, de rayon b , de centre C , roule sans glisser en I_1 sur (S_1) et en I_2 sur (S_2). Soit $R_1(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{z})$ un repère lié à cage (S_3) tel que $\vec{OC} = r\vec{i}$ (r constante positive).

On pose $\alpha = (y, \vec{i})$, $\vec{\Omega}(S_3/R) = \omega\vec{x}$.

QUESTIONS

1° Quelle relation vectorielle obtient-on en exprimant que (S) roule sans glisser sur (S_1)?

2° Quelle relation vectorielle obtient-on en exprimant que (S) roule sans glisser sur (S_2)?

3° Montrer que le rapport de variation est :

$$\frac{\omega_2}{\omega_1} = \frac{\lambda}{a - \lambda}$$

4° Déterminer $\vec{\Omega}(S_3/R)$.

5° Montrer, par un raisonnement simple, que toutes les billes de la cage roulent sans glisser sur (S_1) et (S_2) malgré que la vitesse de leur centre soit imposée par la cage.

6° Tracer la courbe représentative du rapport de variation pour : $0 \leq \lambda < a$.

En pratique : $0 \leq \frac{\omega_2}{\omega_1} \leq 1,2$. Quelle est alors la valeur maximale de λ ?

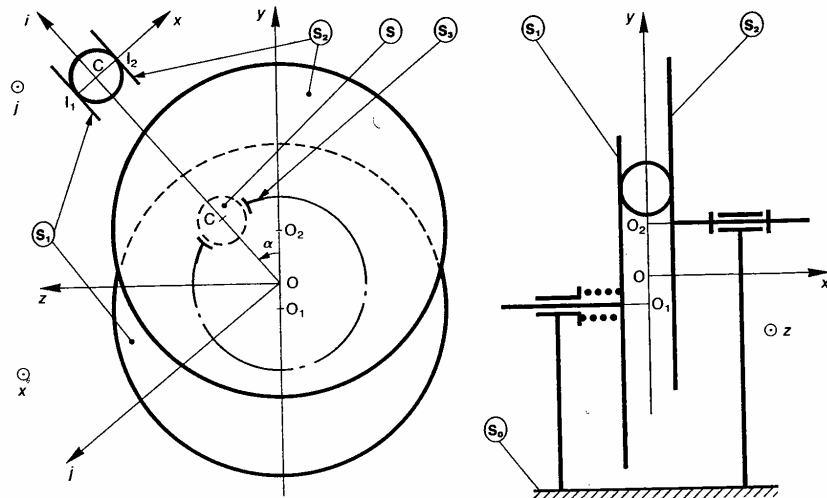


Fig. 34